UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

UNICAEN
université de Caen
Basse-Normandie

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II – SCIENCES 3 – B. P. 5 186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 – CAEN Cédex
Tél. : 02 - 31 - 56 - 74 - 02 – Fax. : 02 - 31 - 56 - 74 - 90
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site Internet : http : / / www.math.unicaen.fr / irem/

Histoire des Mathématiques par leur Littérature

Une histoire des probabilités et des statistiques

Stage du PAF
(10A0050080 – 18412)
1ère Session
Vendredi 25 mars 2011

Quelques lumières sur la courbe dite roulette, cycloïde, ou encore trochoïde, pour servir à la compréhension des considérations de Buffon sur le problème dit “de l’aiguille”

Jean-Pierre LE GOFF & Didier TROTOUX

pour toute demande de références
ou de renseignements complémentaires :
legoff.jeanpierre@orange.fr ou didier.trotoux@unicaen.fr

Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657-1757) :
Article de *Géométrie* sur le Jeu de Franc-Carreau *in* :

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCCXXXIII (Paris, 1735)

[…]

Sur un plancher qui n'est formé que de planches égales & parallèles, on jette une baguette d'une certaine longueur, & qu'on suppose sans largeur. Quand tombera-t-elle franchement sur une seule planche ? […]

Il est clair que dans la résolution du Problème total doit entrer la considération du rapport de la Baguette à la largeur de la planche. Si ces deux grandeurs étaient égales, la Baguette ne tomberait franchement dans toutes ses positions possibles que quand son point du milieu tomberait sur le point du milieu de la largeur de la planche. Si cette largeur est plus grande, elle a un plus grand nombre de points sur lesquels le milieu de la Baguette peut tomber franchement, & au contraire. Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendrait le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie.

Georges-Louis LECLERC, Comte de BUFFON (1707-1788) :
Extrait sur l'*Aiguille* (dite de Buffon), *in* :

Histoire naturelle, générale et particulière. Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme (1777). Supplément, Tome Quatrième. XXIII, pp. 95-105

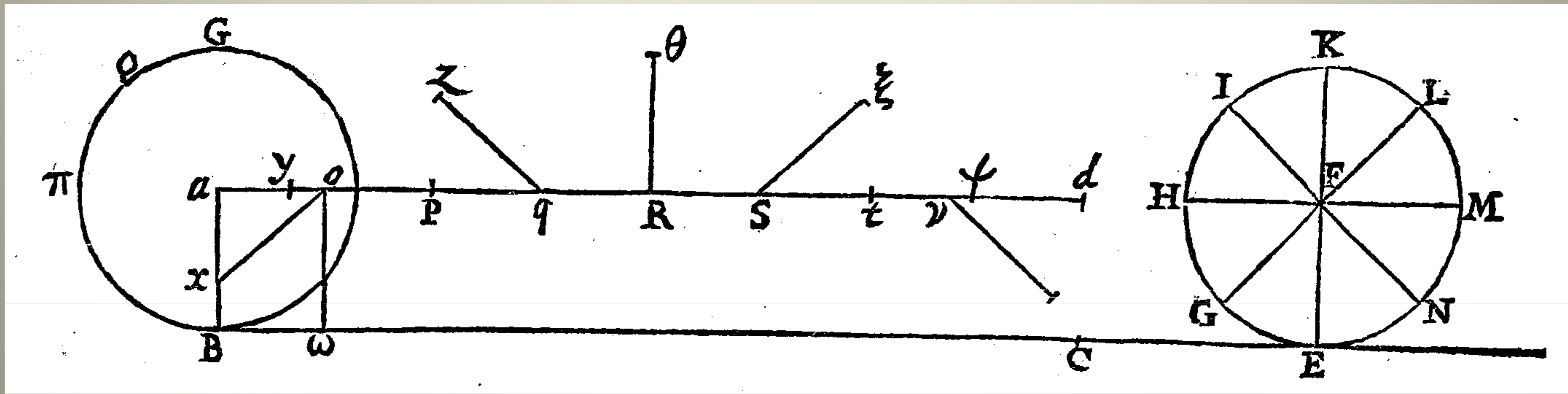
[…]

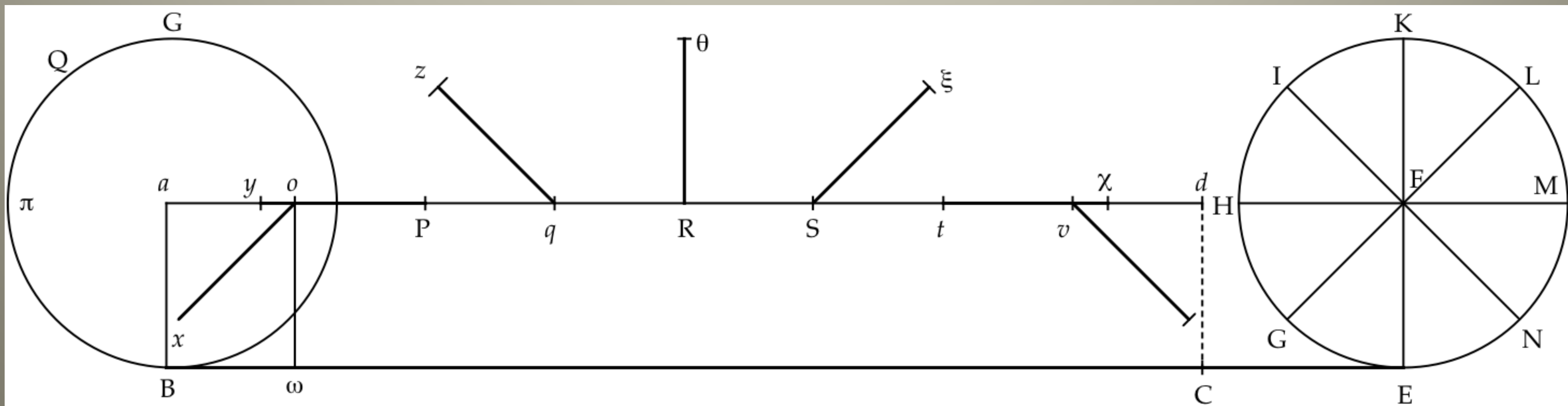
Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetait une pièce d'une autre figure, comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderait un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces comme nous allons le démontrer.

Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.* […]

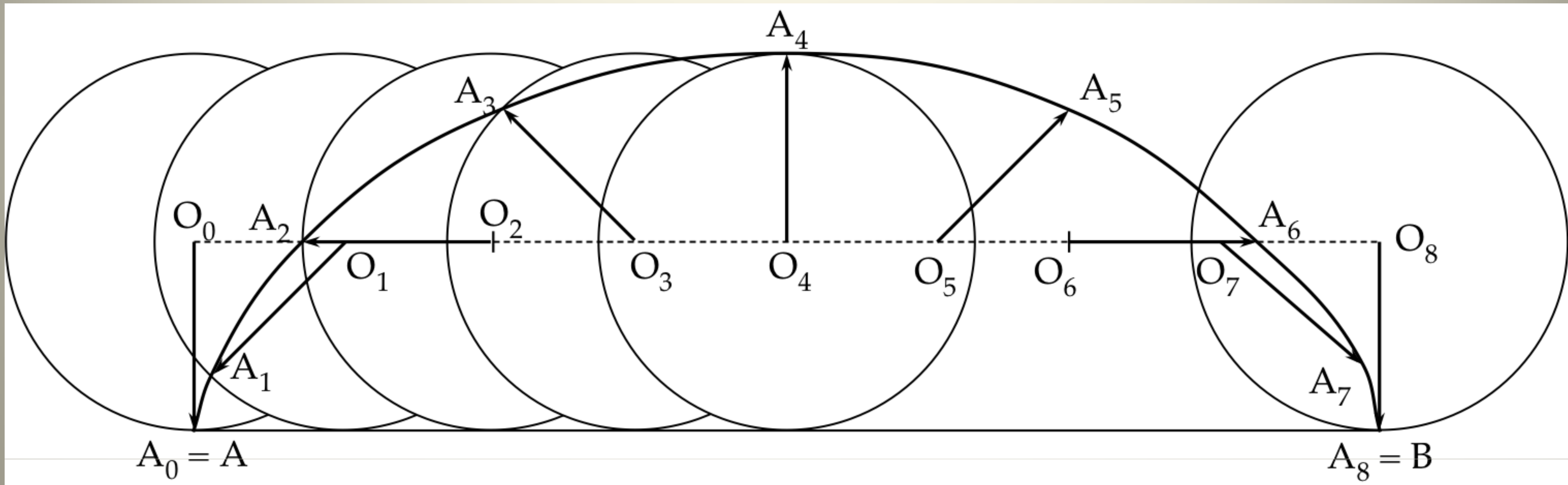
Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $ac = 2\int ydx$ ou $a = \frac{\int ydx}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2b$ longueur de la baguette ; or, on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, donc $a = \frac{bb}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, que la longueur de la baguette doit faire à peu près les trois quarts de la distance des joints du parquet.

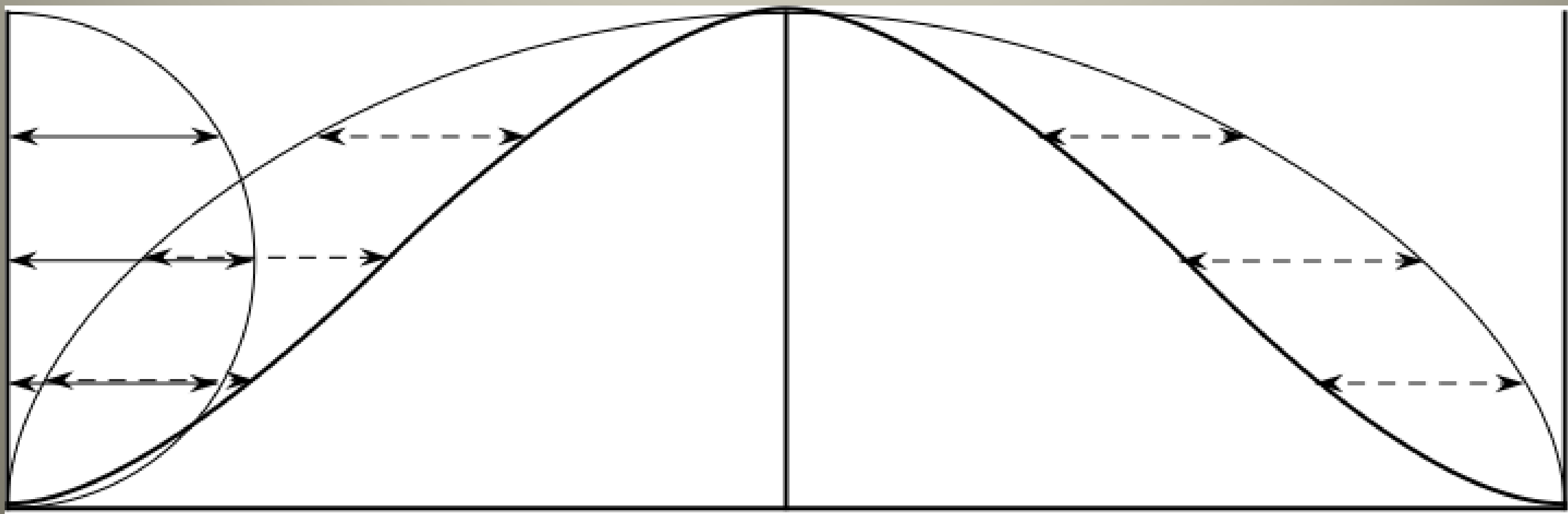
Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Observations sur la Composition des Mouvemens, et sur le Moyen de trouver les Touchantes des Lignes Courbes* (*ca.* 1635), *in* : *Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 63-66. Rééd. in *Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.



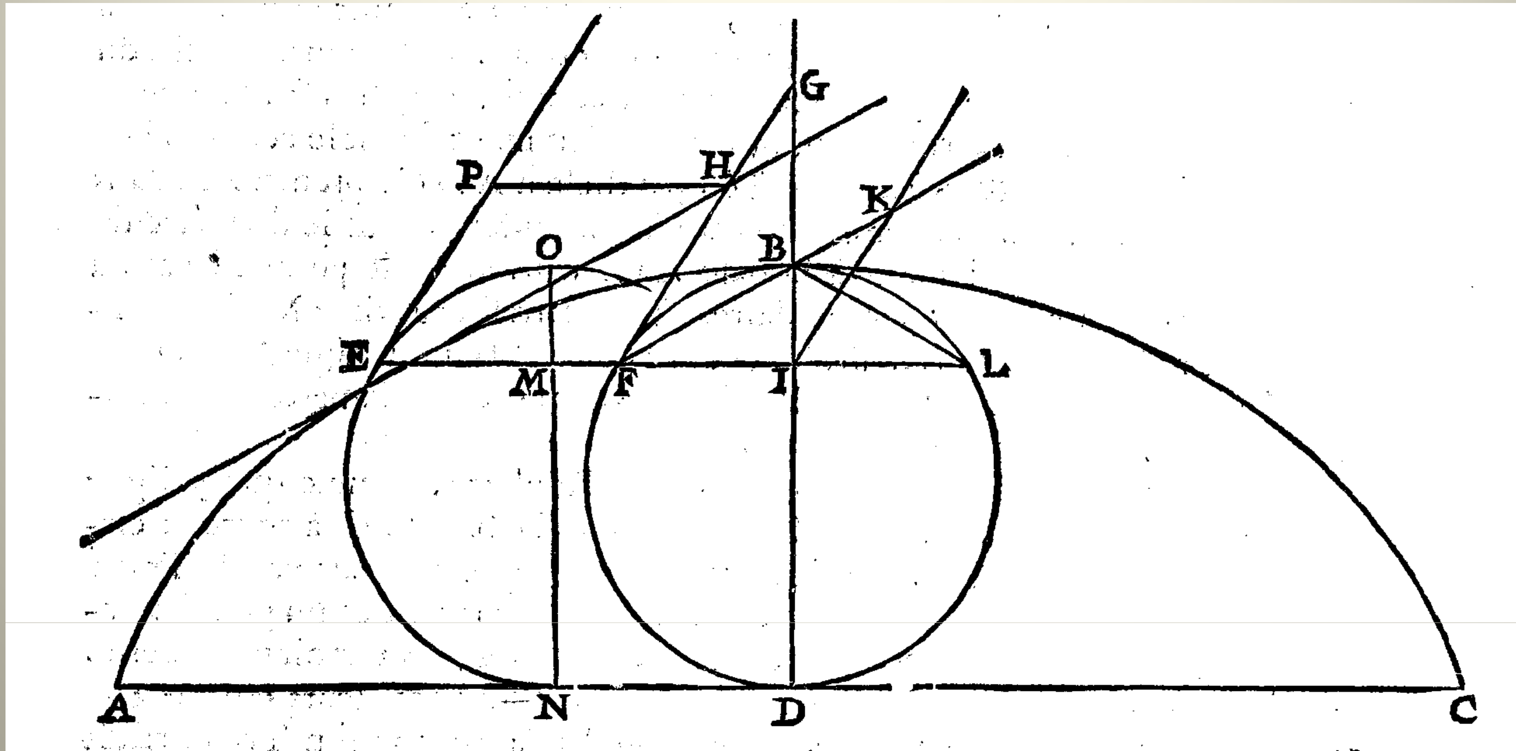


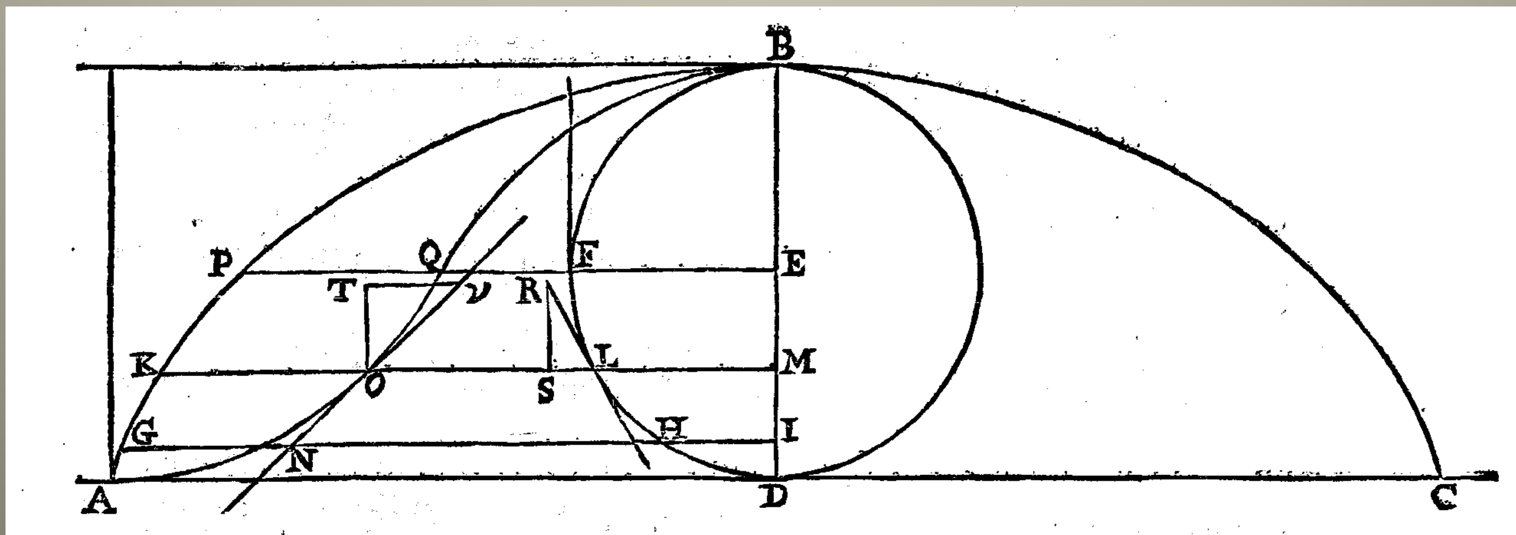
Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Observations… (ca.* 1635), 1693



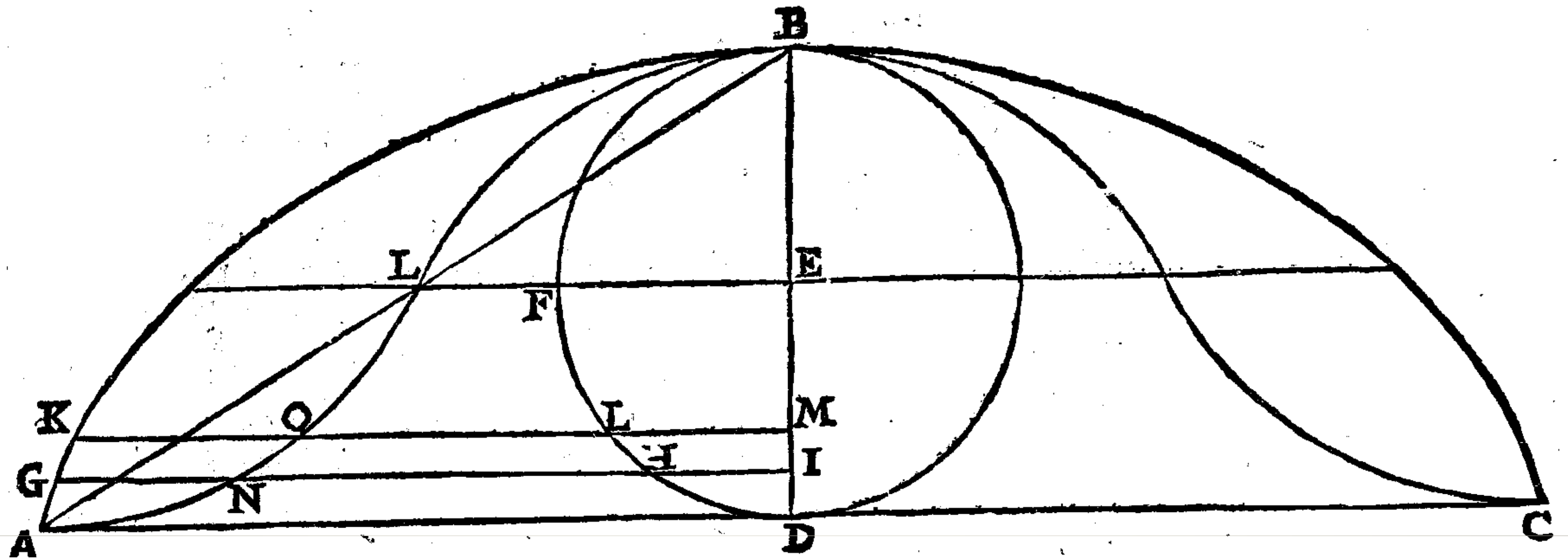


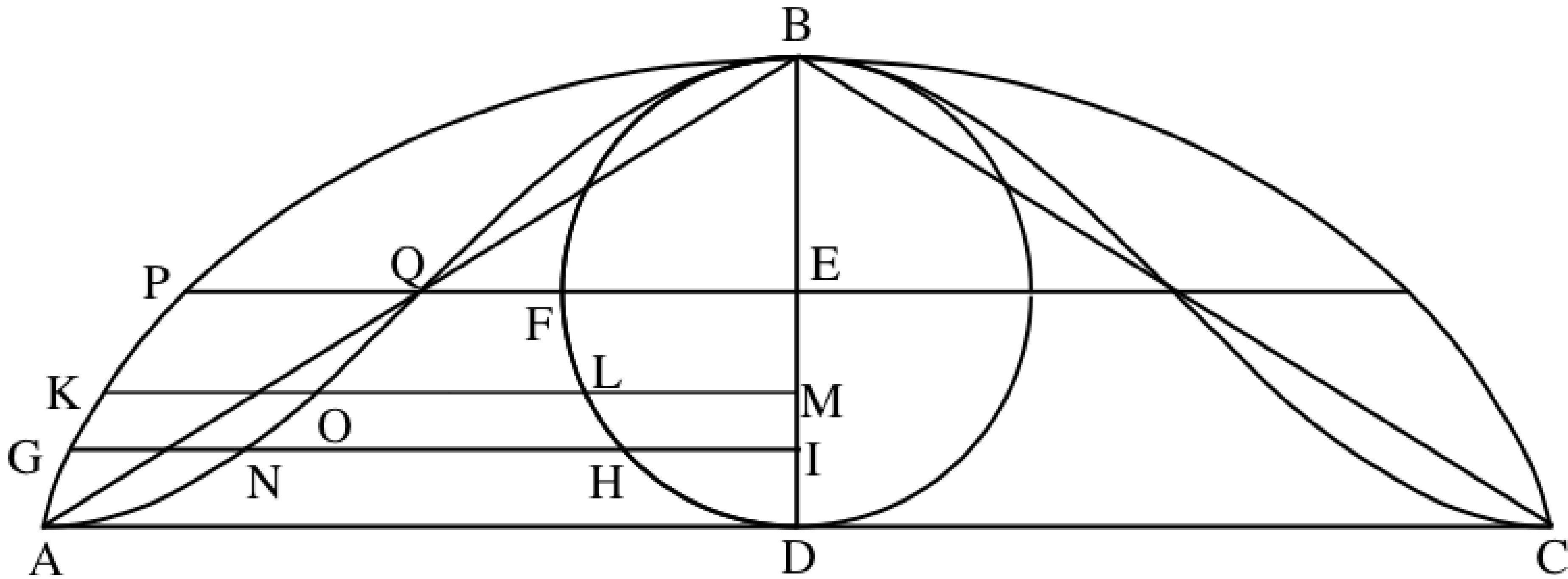
Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Observations…* (*ca.* 1635), 1693



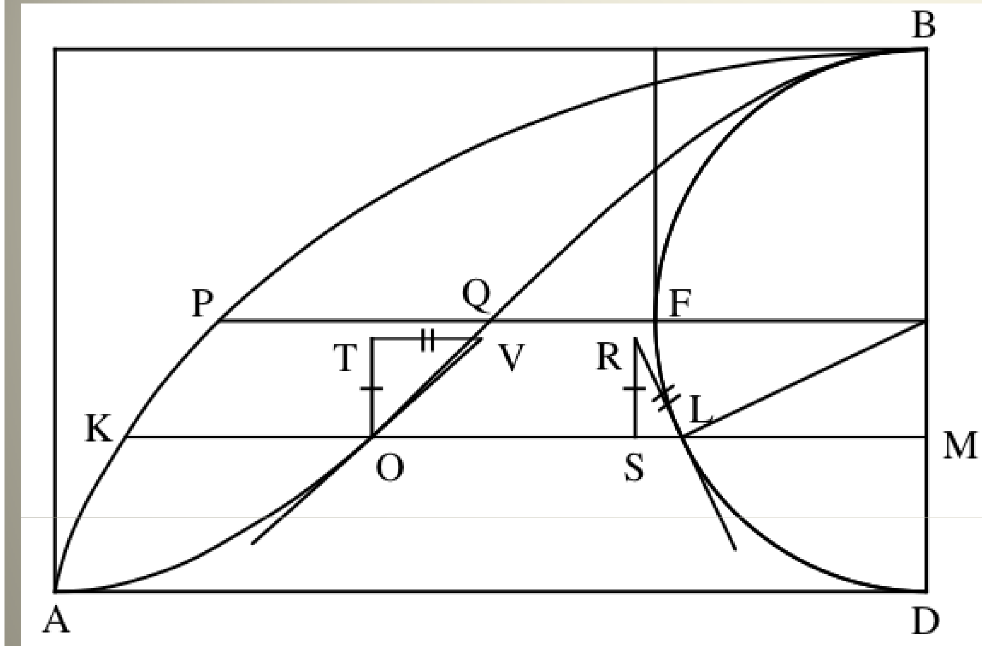


Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Observations…* (*ca.* 1635), 1693





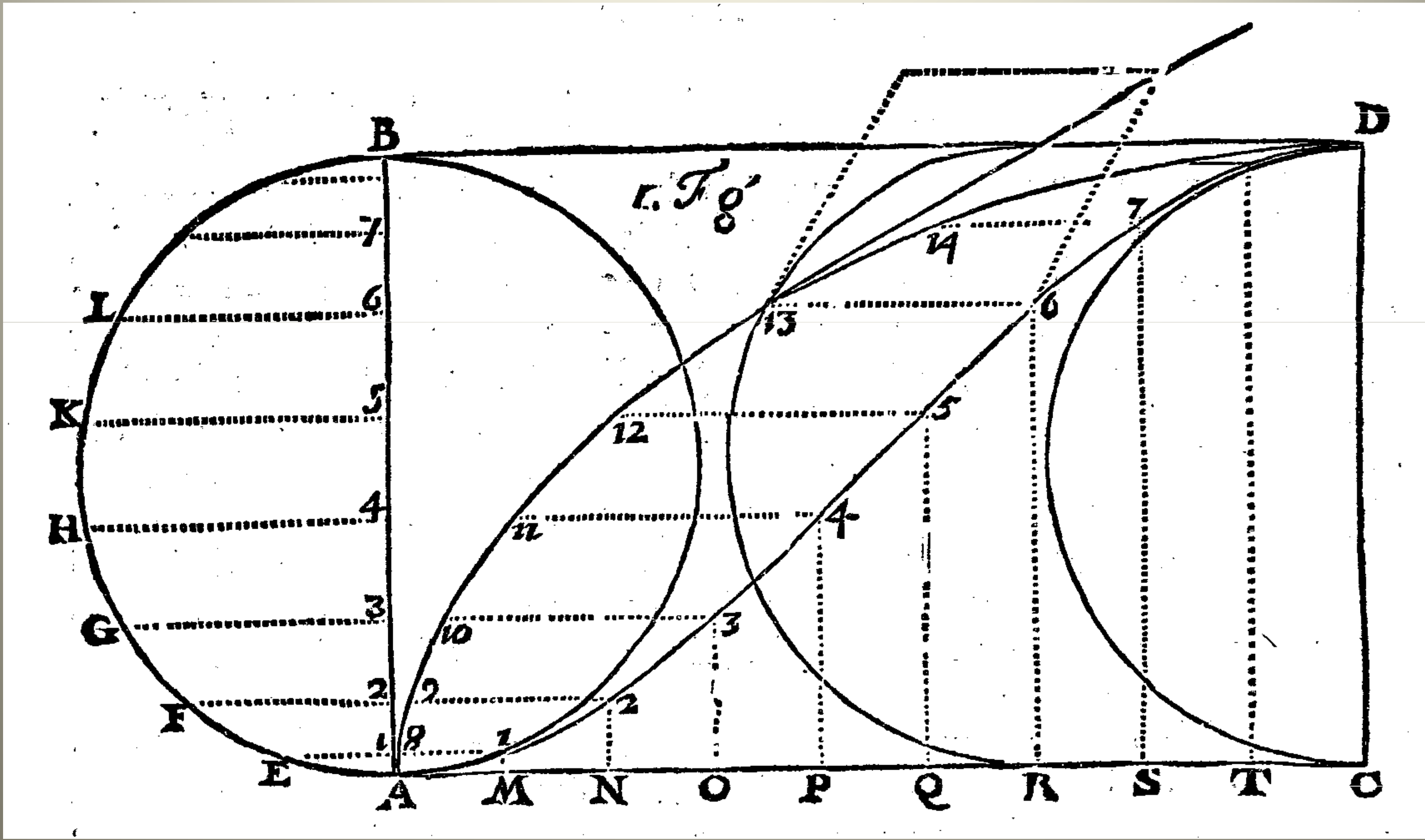
Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Observations…* (*ca.* 1635), 1693



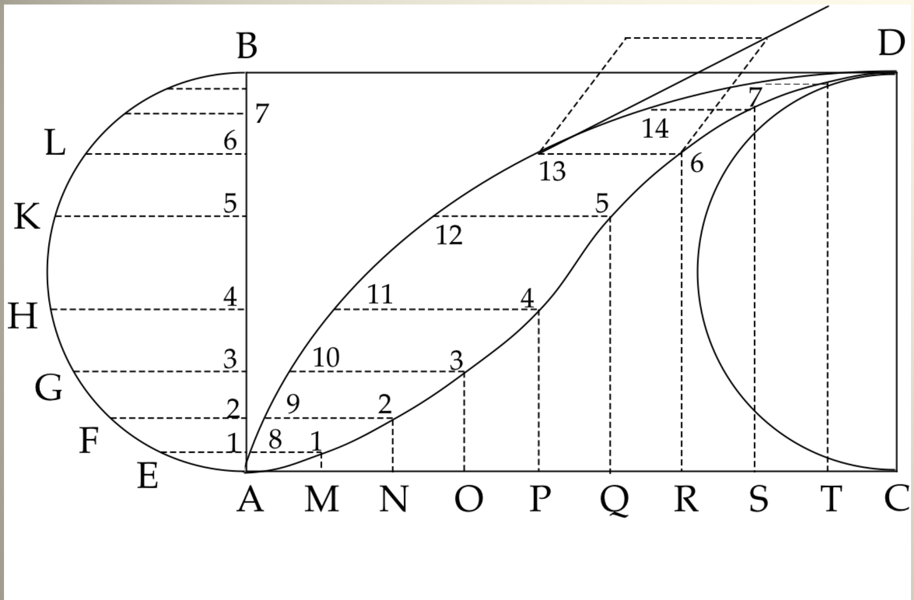
Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, et composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvements droits, l'un parallèle à AD et l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallèle à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point ; et sachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme et égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme et égal à la dite circonférence, si l'on fait que, comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallèle à AC du point de cette ligne-ci qui est réciproque à celui du cercle auquel on a tiré la touchante.

Par exemple, soit la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle et le reste, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L, réciproque du point O, la touchante du cercle LR, et je compose le mouvement LR de deux, RS, SL, dont l'un RS est parallèle à BD ; puis comparant les mouvements du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallèle et égale à RS, ce sera la direction et la quantité de ce premier mouvement du point O ; puis après, parce que le point O a dans une ligne parallèle à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallèle à AC, et égale à LR, j'aurai les directions et la raison des deux mouvements du point O, et partant la ligne OV sera la touchante de cette ligne au point O ; ce qu'il fallait faire.

Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Traité des Indivisibles*, *in* : *Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 250-253. Rééd. in *Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.



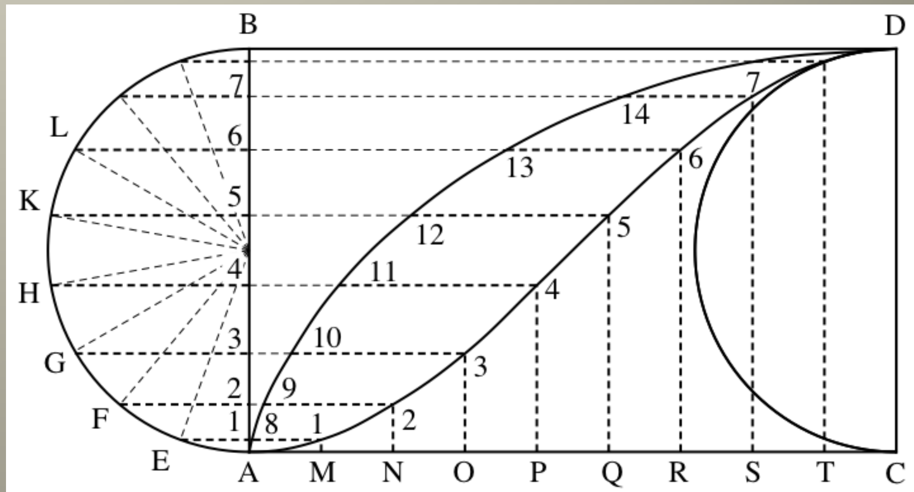
Gilles PERSONNE de ROBERVAL (1602-1675) : *Traité des Indivisibles*, 1693



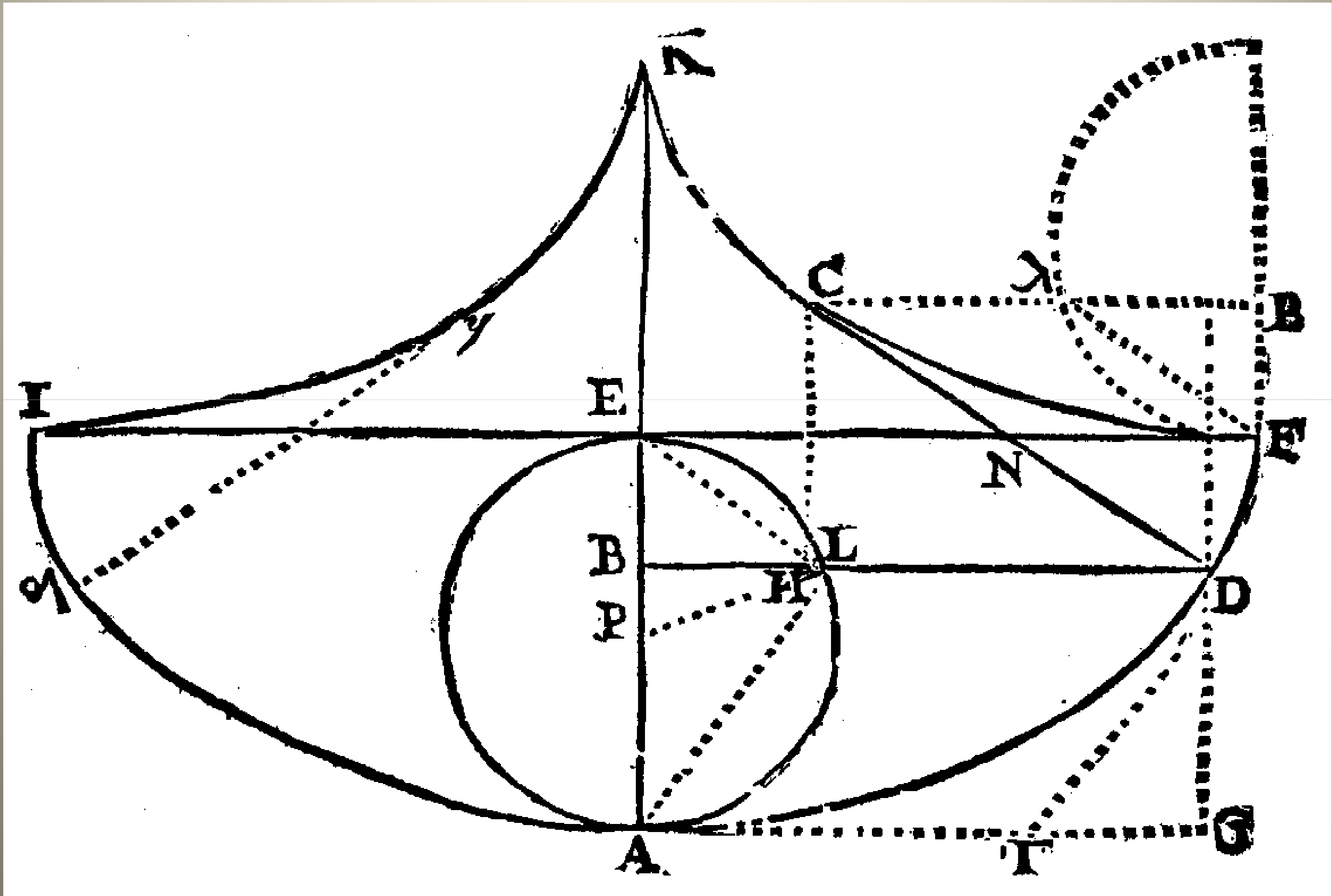
EXPLICATION DE LA ROULETTE.

Je sais comme s'est faite la ligne A 8 9 D ; mais pour savoir quels mouvements ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, et a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, et ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusqu'à ce que le diamètre soit arrivé en CD ; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, et se rejoignant ensemble aux deux extrémités A D.

Or chaque partie contenue entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenue dans la circonférence d'icelui ; car les unes et les autres sont composées de lignes égales, à savoir de la hauteur A1, A2, etc. et des sinus E1, F2, etc. qui sont les mêmes que ceux des diamètres M, N, O, etc. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallélogramme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, et la ligne AC à la ligne BD ; et partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, à savoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle et demi pour l'espace A 8 9 D C ; et faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.



Isaac NEWTON (1642-1727) : *La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies par M. le Chevalier Newton, Traduit par M. de Buffon*. Paris, 1740, p. 69.



Isaac NEWTON (1642-1727) : *La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies par M. le Chevalier Newton, Traduit par M. de Buffon*. Paris, 1740, pp. 69-70.

XXIX. EXEMPLE 4. Soit ADF une Trochoïde ou Cycloïde dont le Cercle générateur soit ALE, soit BD une Ordonnée à cette Courbe qui coupe le Cercle en L ; faites AE = a, AB = x, BD = y BL = u, l'Arc AL = t, & la Fluxion de cet Arc =   ; tirez le demi Diamètre PL ; d'abord la Fluxion de la Base ou Abscisse AB est à la Fluxion de l'Arc AL, comme BL est à PL ; c'est-à-dire, $\dot{x}$ ou 1 : $\dot{t}$: : u : $\frac{1}{2}a$. Ainsi $\frac{a}{2u} = \dot{t}$,

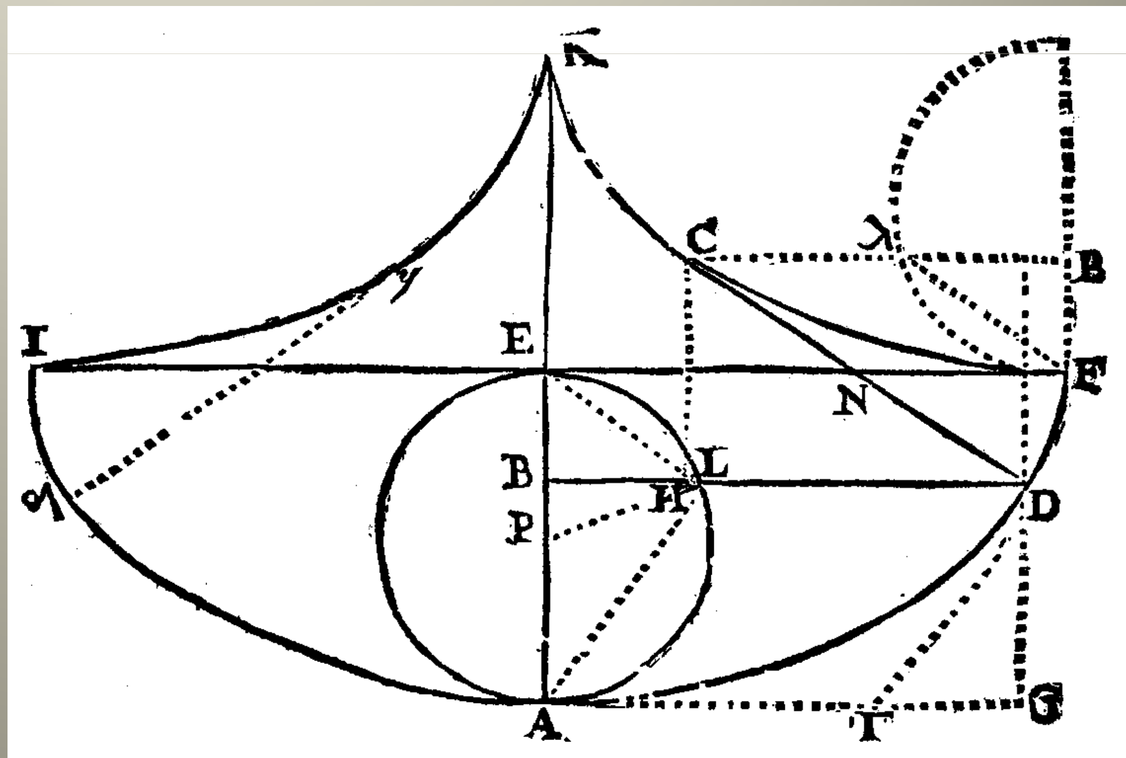
& par la nature du Cercle $ax - xx = uu$, d'où $a - 2x = 2\dot{u}u$, ou $\frac{a-2x}{2u} = \dot{u}$.

XXX. De plus par la nature de la Trochoïde, LD = l'Arc AL, ainsi $u + t = y$, d'où $\dot{u} + \dot{t} = z$;

au lieu des Fluxions $\dot{u}$ & $\dot{t}$ substituez leurs Valeurs & vous

Aurez $\frac{a-x}{u} = z$; d'où vous

tirerez $-\frac{a\dot{u}}{uu} + \frac{x\dot{u}}{uu} - \frac{1}{u} = \dot{z}$;



Isaac NEWTON (1642-1727) : *La Méthode des Fluxions…* Paris, 1740, pp. 69-70.

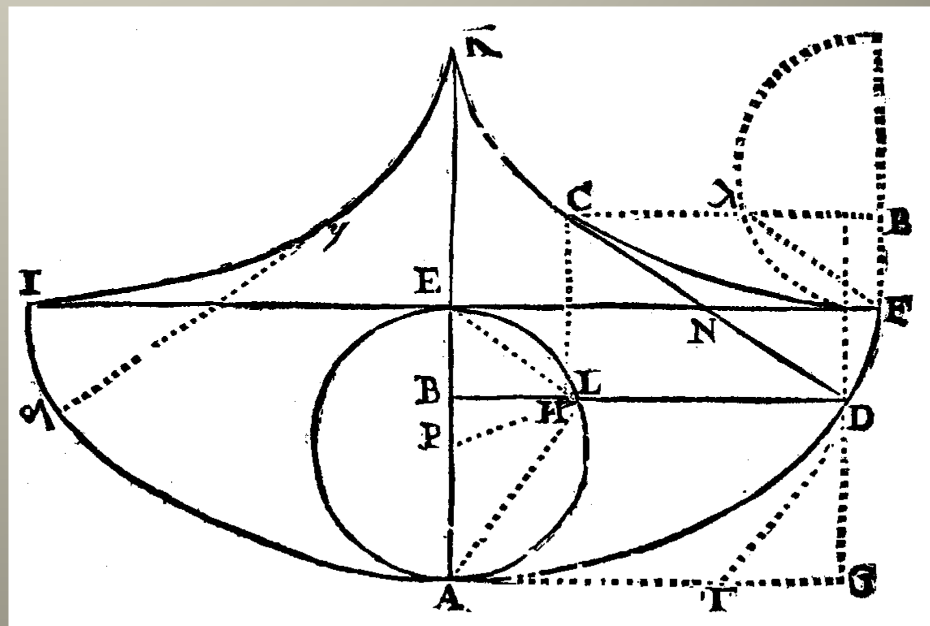
faites donc $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ = – DH & élevez la perpendiculaire HC.

XXXI. COROL. I. Il suit de là que DH = 2BL, & CH = 2BF, c'est-à-dire que EF coupe par la moitié le Rayon de Courbure CD au Point N ; cela se voit en substituant les Valeurs de z & $\dot{z}$ dans l'Equation $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ = DH, & en réduisant le résultat.

XXXII. COROL. 2. De là on voit que la courbe FCK, décrite par le centre de courbure de ADF, est une autre trochoïde égale à la première ; mais dont les sommets I & F se joignent aux pointes de cette même première Trochoïde ; car imaginons un Cercle Fλ de même grandeur & position que ALE, & Cβ parallèle à EF, rencontrant le Cercle en λ ; l'Arc Fλ sera = l'Arc EL = NF = Cλ.

XXXIII. COROL. 3. La Ligne droite CD perpendiculaire à la Trochoïde IAF, sera Tangente de la Trochoïde IKF au Point C.

{Note : La figure originale nomme par erreur "B" le point "β" de la parallèle C$\lambda\beta$ à EF, ce qui fait double emploi avec le point "B" sur [EA], origine d'une parallèle BLD à IEF.}



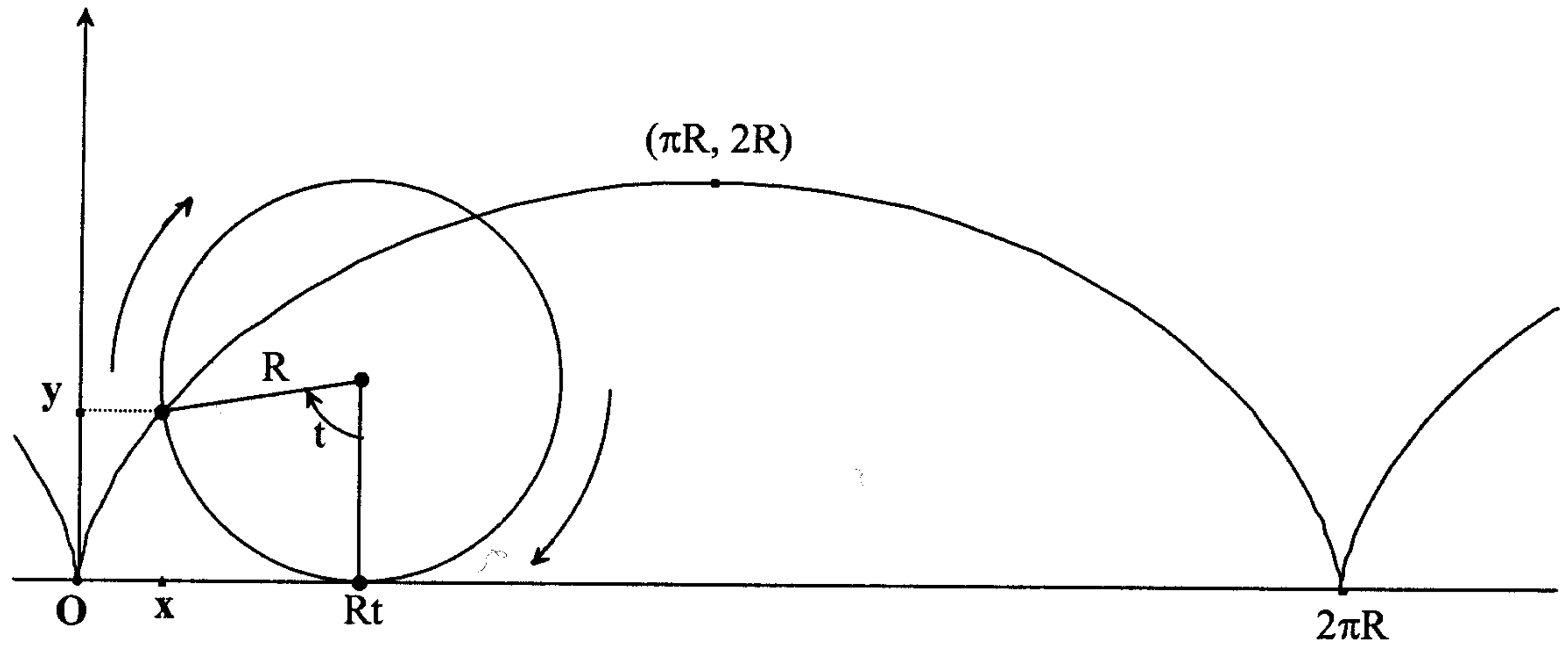
Didier TROTOUX : Le point de vue moderne et cinématique, avec des équations paramétriques (Stage IREM de 2003)

La cycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite (D) (ici l'axe Ox).

Elle admet pour équations en coordonnées paramétriques :

$$\boxed{\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) = 2R\sin^2 \frac{t}{2} \end{cases}}$$

et pour équation cartésienne : $\boxed{x = R \arccos \frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}}$.



Les dérivées de la représentation paramètrique sont : $\boxed{\begin{cases} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = R(1-\cos t) \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = R\sin t \end{cases}}$.

D'où la formule du nombre dérivé, localement, en un point de la courbe cartésienne : $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{cotg}\dfrac{t}{2}}$.

Les carrés des dérivées sont : $\boxed{\begin{cases} [x'(t)]^2 = x'^2(t) = R^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right) \\ [y'(t)]^2 = y'^2(t) = R^2\sin^2 t \end{cases}}$,

d'où l'on déduit l'abscisse curviligne pour t ≤ 2π :

$$\boxed{s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}\, du}$$

$$\boxed{= R\int_0^t \sqrt{\left(1-2\cos u+\cos^2 u\right)+\sin^2 u}\; du}$$

$$\boxed{= R\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{(1-\cos u)}\, du = 2R\int_0^t \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}\, du}$$

$$= 2R\int_0^t \sin\frac{u}{2}\,du = 2R\left[-2\cos\frac{u}{2}\right]_0^t$$

$$= 4R\left(1-\cos\frac{t}{2}\right) = 8R\sin^2\frac{t}{4}.$$

En particulier, la longueur d'une arche de cycloïde vaut $L = 8R$.

L'angle tangentiel cartésien vaut $\alpha = \text{mes}\left(\vec{i},\vec{T}\right) = \dfrac{\pi-1}{2}$, car :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{j} = \frac{R(1-\cos t)}{2R\sin\frac{t}{2}}\vec{i} + \frac{R\sin t}{2R\sin\frac{t}{2}}\vec{j}$$

$$= \sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j} = \cos\frac{\pi-t}{2}\vec{i} + \sin\frac{\pi-t}{2}\vec{j}.$$

Le rayon de courbure vaut : $R_c = \dfrac{1}{\dfrac{d\alpha}{ds}} = \dfrac{\dfrac{ds}{dt}}{\dfrac{d\alpha}{dt}} = \dfrac{2R\sin\dfrac{t}{2}}{-\dfrac{1}{2}} = -4R\sin\dfrac{t}{2}.$

Par conséquent, le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_c = R(t-\sin t) + 4R\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = R(t+\sin t) \\ y_c = R(1-\cos t) = 4R\sin^2\frac{t}{2} = R(\cos t - 1) \end{cases}.$$

La développée de la cycloïde est donc une cycloïde translatée de vecteur $\pi R\vec{i} - 2R\vec{j}$, car :

$$\begin{cases} x_c(\pi + t) = \pi R + x(t) \\ y_c(\pi + t) = y(t) = 2R \end{cases}$$

La développante d'une cycloïde passant par l'un de ses sommets est donc aussi une cycloïde translatée.

L'aire située sous une arche de cycloïde est égale à :

$$A = \int_{t=0}^{t=2\pi} y dx = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)[(1 - \cos t)dt] = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 \, t\right) dt = R^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi R^2.$$