BOSCOVICH et la médiane

Stage PAF (11A0050134-20680)

20 janvier 2012

IREM de Basse-Normandie

Pourquoi étudier BOSCOVICH ?

• Histoire de la Statistique, J.-J. Droesbeke & P. Tassi, Que sais-je n°2527, PUF,1990.

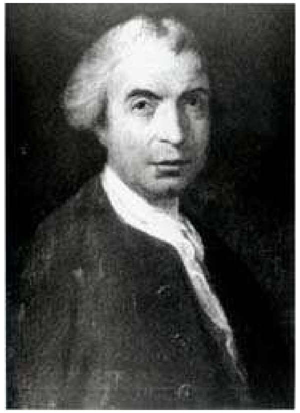
p.10 : « *Remarquons encore que la* médiane *voit naître son intérêt à la même époque, en 1757 , sous la plume de Roger Joseph Boscovich.* »

• Moyenne, médiane, écart-type, Quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques, A. Boyé et M. C. Comairas, Revue Repères-IREM n°48, juillet 2002.

p. 35 : « *Le terme médiane est introduit par Cournot en 1843.*
(Exposition de la théorie des chances et des probabilités).
Laplace parlait de « milieu de probabilité ».
1757 : Roger Joseph Boscovitch est un des premiers à souligner l'intérêt de cette valeur centrale.
1885 : Galton, dans le cadre des statistiques « morales », propose de substituer l'usage de la médiane à celui de la moyenne, susceptible de trop grande variabilité. »

• Premiers pas en statistique, Y. Dodge, Springer, 2006.

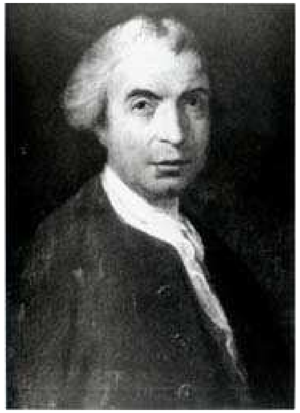
p. 68 : « *L'introduction de la moyenne arithmétique pondérée en tant que telle, est due à R. Cotes en 1712. Et les prémices de la médiane viennent en 1748 suite aux propositions similaires d'Euler et Mayer sur le moyen de diviser les observations d'un ensemble de données, en deux parties égales. La véritable méthode de la médiane sera présentée par Boscovich en 1757.* »



R. J. BOSCOVICH

Dubrovnik (1711) – Milan (1787)

- 1711 – 1725 : éducation jésuite à Drubovnik.
- 1725 : départ pour Rome pour compléter sa formation.
- 1735 – 1744 : publication de nombreux articles en astronomie mathématiques et physique.
- 1740 : poste de professeur de mathématiques au Collège Romain.
- 1744 : ordonné Père Jésuite.
- 1750 – 1753 : Expédition avec C. MAIRE pour mesurer un arc de méridien et établir une nouvelle carte des états pontificaux.



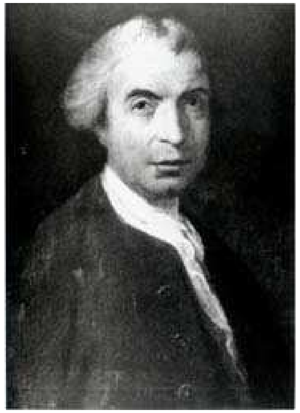
R. J. BOSCOVICH (2)

• 1755 : Publication en latin du rapport de cette expédition : *De Litteraria Expeditione per Pontificam ditionem ad dimetiendas duas Meridiani gradus, …*(traduit en français et publié à Paris en 1770).

• 1758 : Publication de *Philosophia naturalis Theoria ad unicam legem virium in Natura existentium*.

• 1759 – 1763 : Activités diplomatiques et ecclésiastiques en Europe (France, Angleterre, Pays-Bas, Allemagne, Turquie, Pologne, Bulgarie, Moldavie).

• 1763 – 1772 : Poste de mathématiques (Pavie en 1763) et d'astronomie (Milan en 1769).



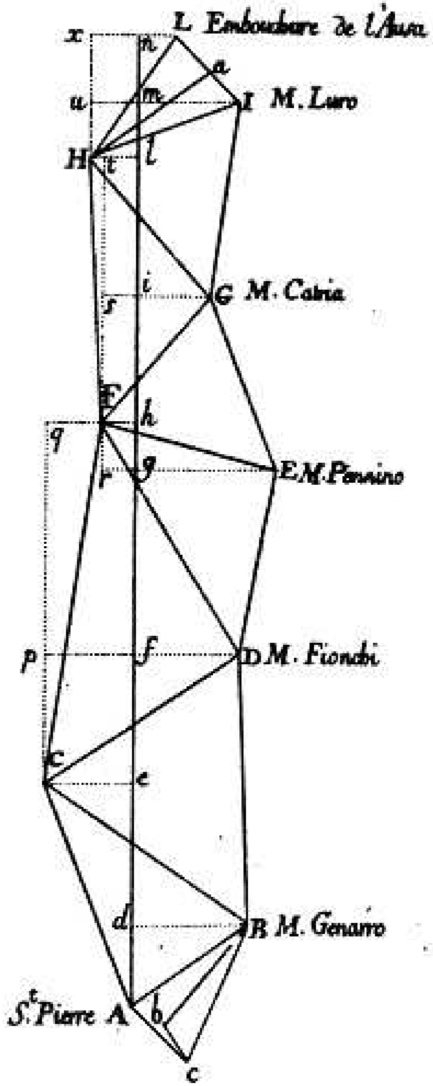
R. J. BOSCOVICH (3)

• 1772 – 1782 : Séjour à Paris comme directeur de l'Optique navale de 1772 au Ministère de la Marine.

• 1782 – 1787 : Retour en Italie.

Détermination de la mesure d'un degré de méridien (1)

Triangulation

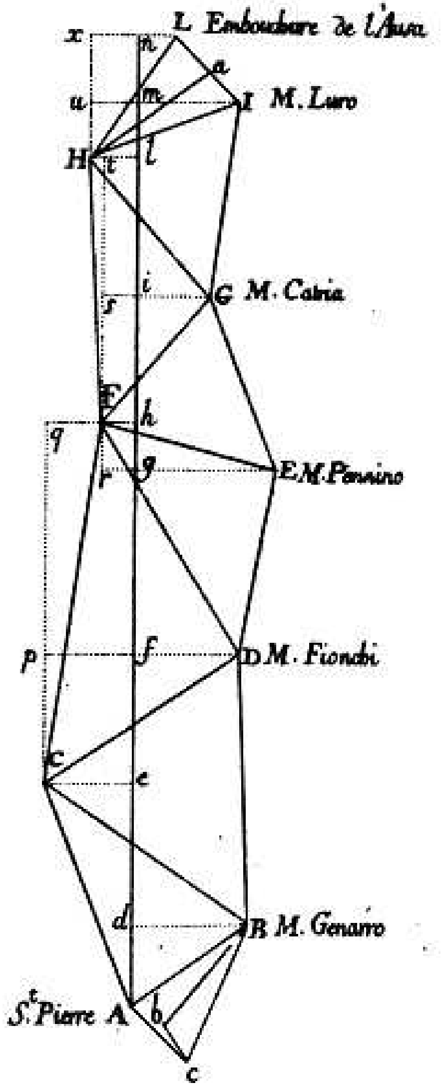


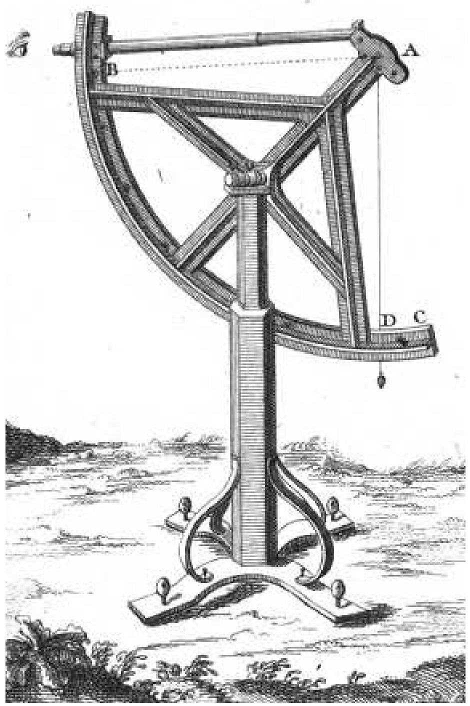
TRIANGLES.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés opposés en pas romains.	
Embouchure de l'Ausa	L	78°	47'	22"	aH	23614.0
Autre extrémité de la base	a	82	2	40	LH	23841.3
CARPEGNA M.	H	19	9	58	La	7901.14
Embouchure de l'AUSA	L	77	20	48	IH	25352.2
Mont LURO	I	66	34	20	LH	23841.3
CARPEGNA M.	H	36	4	52	LI	15302.4
Mont LURO	I	64	59	51	HG	32454.7
CARPEGNA M.	N	69	56	1	IG	33656.7
CATRIA M.	G	45	4	8	IH	25352.2
CARPEGNA M.	H	37	11	41	GF	27417.4
CATRIA M.	G	97	6	47	HF	45004.5
TESIO M.	F	45	41	32	HG	33454.7

TRIANGLES.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés opposés en pas romains.	
CATRIA M.	G	64°	51'	47"	FE	30090.9
TESIO M.	F	59	33	47	GE	28658.0
PENNINO M.	E	55	34	26	GF	27417.4
TESIO M.	F	45	46	21	ED	32495.2
PENNINO M.	E	92	39	19	FD	45299.0
FIONCHI M.	D	41	34	19	FE	30090.9
TESIO M.	F	38	35	49	DC	37186.1
FIONCHI M.	D	91	56	38	FC	59574.2
SORIANO M.	C	49	27	33	FD	45299 0
FIONCHI M.	D	60	5	37	CB	42243.2
SORIANO M.	C	70	10	19	DB	45843.9
GENARRO M.	B	49	44	4	DC	37186.1
SORIANO M.	C	32	12	14	BA	22935.6
GENARRO M.	B	68	48	35	CA	40124.3
Dôme de St Pierre	A	78	59	11	CB	42243.2

Détermination de la mesure d’un degré de méridien (2)

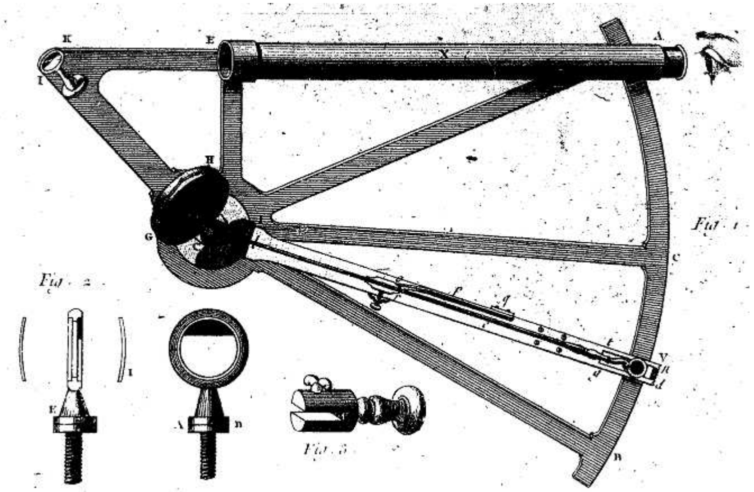
Instruments





Quart de cercle

Mesure de la Terre de M. Picard
Planche III p. 116

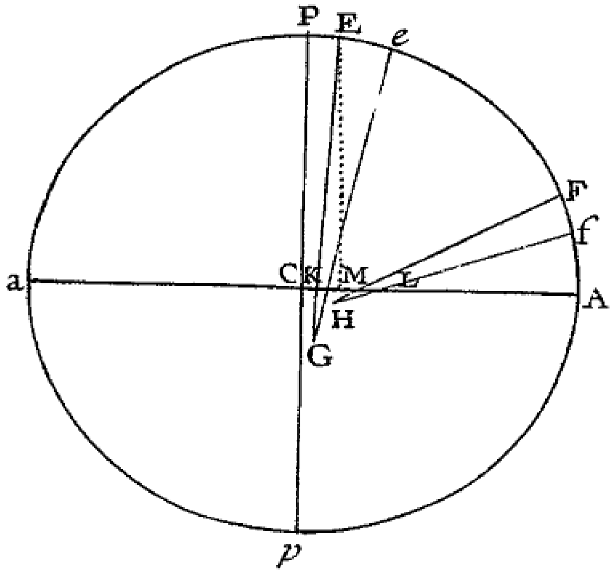


Secteur de Fouchy

Planche 35, Astronomie, Encyclopédie Diderot, livre V.

Détermination de la figure de la Terre par la mesure des degrés

Fig. 17



Mém. de l'Acad. 1737. Pl. 17. p. 468

Maupertuis

Notations :

E = Ee, F= Ff

$ſ = \sin(\lambda_E)$, $s = \sin(\lambda_F)$

P R O B L E M E.

La longueur & la latitude de deux degrés du Méridien, étant données, trouver la Figure de la Terre !

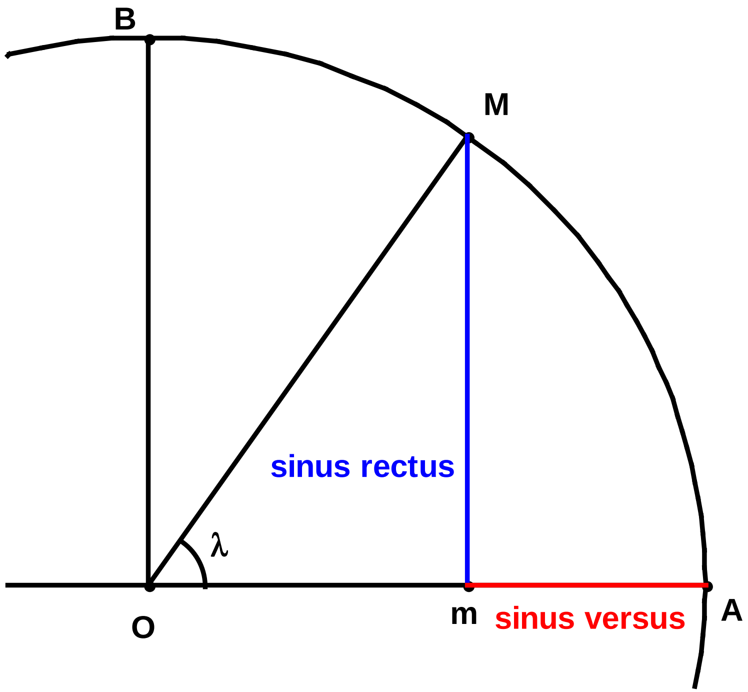
prenant D, pour la différence entre le demi-axe & le rayon de l'Equateur, on a $D = \frac{E-F}{3(E\,ſſ - Fss)}$, ou $D = \frac{E-F}{3E(ſſ - ss)}$. D'où l'on peut facilement déterminer l'eſpece de l'Ellipſoïde, & conſtruire une Table des différentes longueurs du degré pour chaque latitude.

Coroll. Si l'un des degrés qu'on compare, eſt pris à l'Equateur, la formule précédente devient $D = \frac{E-F}{3E\,ſſ}$. Et ſi l'autre degré eſt pris au Pole, la formule devient $D = \frac{E-F}{3E}$; d'où l'on voit que le diametre de l'Equateur eſt au triple du dernier degré de latitude, comme la différence entre le diametre de l'Equateur & l'axe, eſt à la différence entre le premier & le dernier degré de latitude.

Détermination de la figure de la Terre

Sous l’hypothèse d’une figure elliptique pour la Terre :

n°174, Livre V : *La diminution de la distance, de même que l’augmentation de la gravité, depuis l’équateur jusqu’au pôle, est en raison doublée du sinus de la latitude, ou en raison du sinus verse d’une latitude double.*



- En d’autres termes, si y désigne la longueur de l’arc d’un degré de méridien et λ la latitude :

$$y = a + b \sin^2(\lambda)$$

où *a* est la longueur du degré de méridien à l’équateur (λ=0) et *b* l’excès de la longueur du degré de méridien au pôle ($\lambda=\pi/2$) sur celle du degré à l’équateur.

- L’ellipticité est le rapport de la différence des demi-axes au demi grand-axe. Elle vaut *b*/3*a*.

- sinus verse $(2\lambda) = 1 - \cos(2\lambda) = 2\sin^2(\lambda)$

La méthode de Boscovich (1)

Boscovich cherche à déterminer *a* et *b* pour obtenir une expression du degré de méridien y en fonction de x (1/2 sinus verse de la latitude) de la forme y = *a* + *b* x à partir des n observations (x_i, y_i).
Il énonce le problème de la façon suivante :

« étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions :
la première, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des sinus verses d'une latitude double :

$$y = a + b\,x$$

la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives :

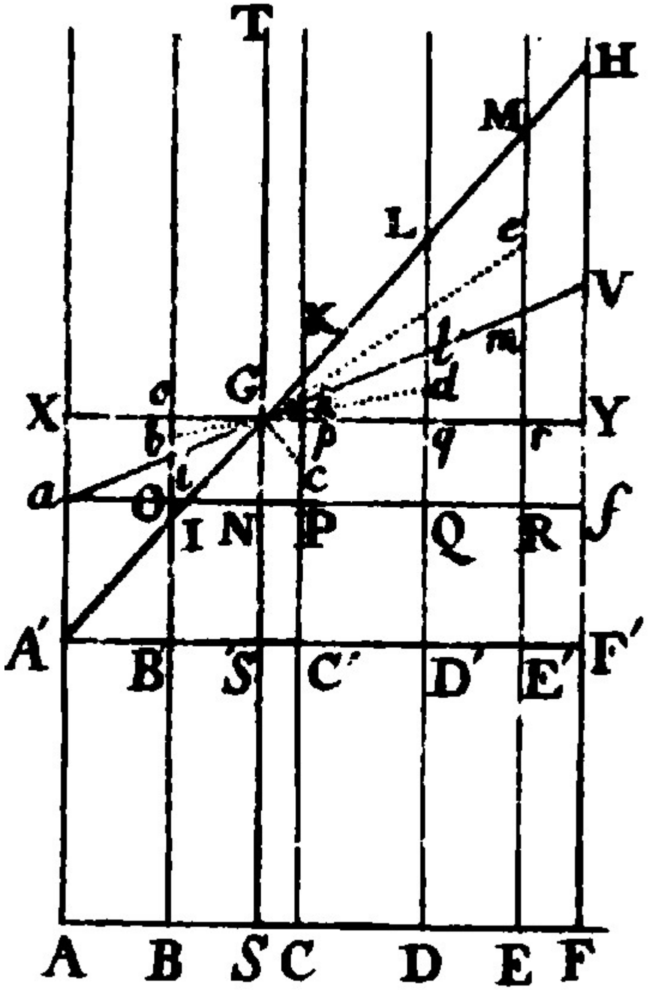
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - b\,x_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{y} = a + b\,\overline{x}$$

la troisième que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions soient remplies. »

$$\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - a - b\,x_i\right| = \text{minimum}$$

La méthode de Boscovich (2)

Boscovich propose une méthode géométrique pour résoudre le problème.



Il place dans un diagramme rectangulaire les 5 points (x_i, y_i) avec en abscisse les ½ sinus verses (A, B, C, D , E) et en ordonnée les degrés (a, b, c, d, e) (n° 38 7).

La 1ère condition revient à déterminer une droite ajustant les 5 points placés précédemment, comme la droite A'H (n° 388).

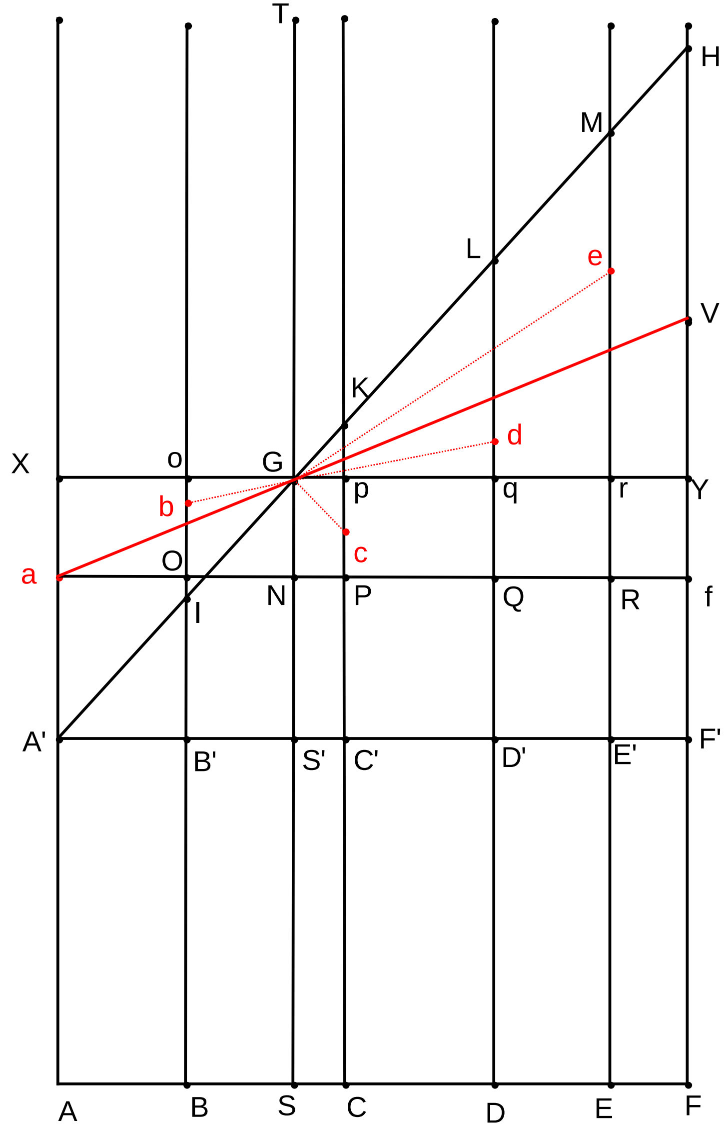
La 2ème condition revient à faire passer cette droite par G point moyen des 5 points (n° 389). Le calcul des coordonnées de G est expliqué au n°392.

Pour satisfaire la 3ème condition, il imagine une droite mobile partant de la position verticale SGT tournant dans le sens horaire autour de G. Il suffit de noter l'ordre dans lequel les points sont rencontrés par cette droite et de faire la somme des corrections AS, BS,CS, DS et ES correspondant à ces points. Lorsque cette somme devient supérieure à la moitié de la somme totale des corrections, la droite obtenue vérifie la 3ème condition (n° 390 et 391).

La méthode de Boscovich (3)

Il propose la méthode suivante :

divisez pour chaque point la différence de son sinus verse au sinus verse AS par la différence du degré qui y répond, au degré SG ; & que les quotients des points qui se trouvent dans deux angles opposés au sommet, considérés ensemble, soient rangés par ordre, en commençant par les plus petits ; qu'ensuite on range aussi les quotients des autres points, placés dans les autres angles, en commençant par les plus grands. C'est dans cet ordre que la droite mobile atteindra tous ces points, si elle commence à se mouvoir dans les deux premiers angles ; & ce serait le contraire si elle commençait à se mouvoir dans les deux derniers.



La méthode de Boscovich (4)

Dans l'exemple traité, les points rencontrés sont successivement e, a, b, d et c car :

$$\frac{a\mathrm{N}}{a\mathrm{X}} = 14,4 \ ; \ \frac{\mathrm{ON}}{ob} = 87,8 \ ; \ \frac{\mathrm{QN}}{qd} = 65,7 \ ; \ \frac{\mathrm{RN}}{re} = 10,9$$

Les corrections positives sont AS = 4356.6 et BS = 1369.6 et les corrections négatives sont CS = -291.4, DS =-1405.4 et ES = -4029.4 .

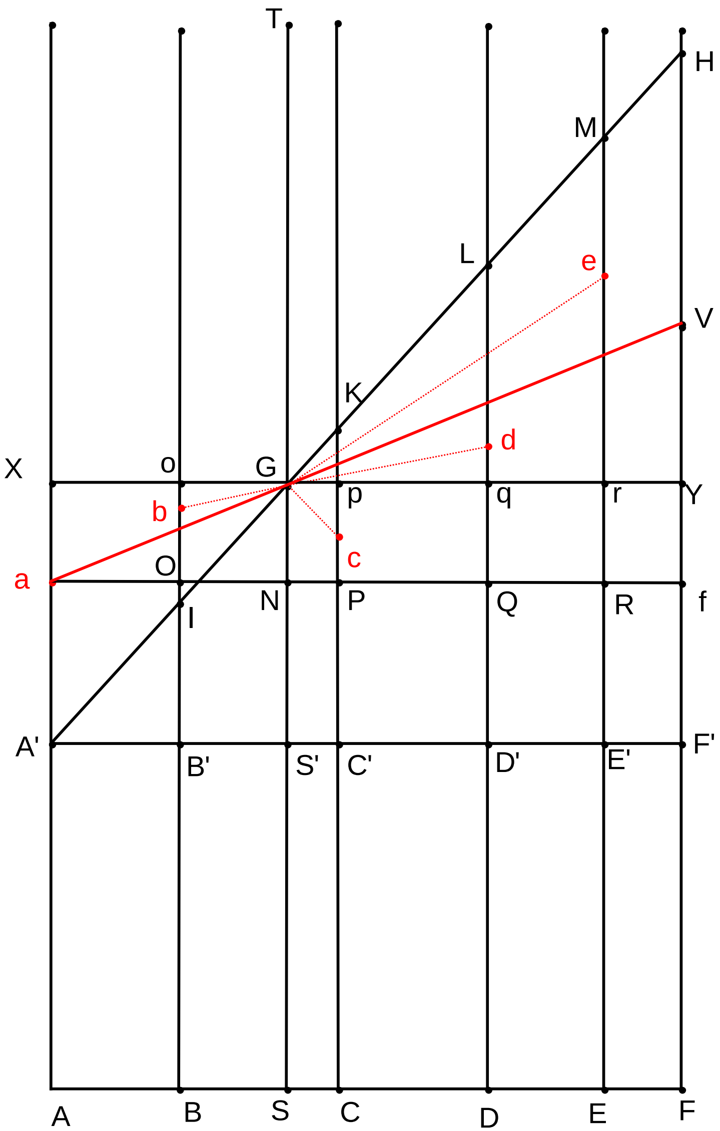
On calcule la demi-somme de ces valeurs qui vaut AS + BS = 5726,2.

La correction relative à E vaut 4029.4 et est inférieure à 5726.2 .

La somme des corrections relatives à E et A vaut 4029.4 + 4356.6 = 8386 dépasse 5726.2 ce qui signifie que la droite *a*GV est la droite cherchée qui a pour équation :

$$y = 56751 + 692.3 \sin^2(\lambda)$$

L'ellipticité vaut 1/248.



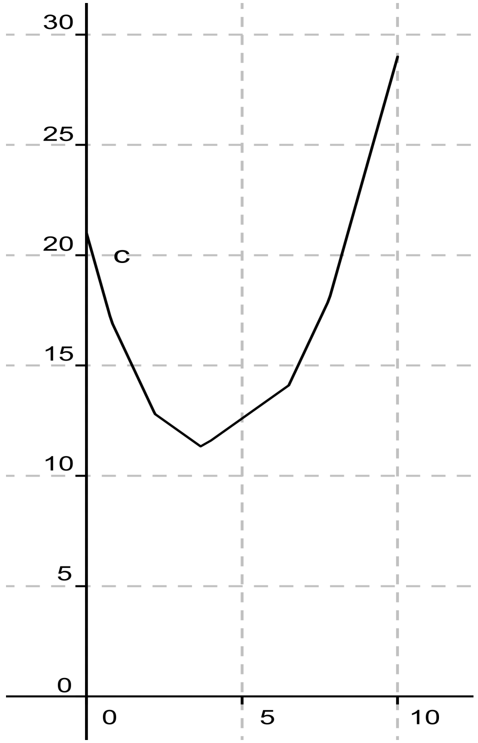
Et la médiane dans tout cela ? (1)

La médiane d'une série de valeurs (x_i) a la propriété d'être une valeur qui minimise la somme des écarts absolus.

Par exemple, prenons les 5 valeurs 0.8, 2.2, 3.7, 6.5, 7.8 .

Notons f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{5} |x - x_i|$$



La fonction f est une fonction affine par morceaux, décroissante d'abord puis croissante ensuite, qui atteint son minimum en x = 3.7 .

Et la médiane dans tout cela ? (2)

On peut traduire algébriquement, en utilisant des notations modernes, la méthode de Boscovich.

Notons $b_i = \dfrac{y_i - \overline{y}}{x_i - \overline{x}}$ et $w_i = |x_i - \overline{x}|$.

Minimiser $\sum_{i=1}^{n} |y_i - a - b\, x_i|$ avec $\overline{y} = a + b\,\overline{x}$ revient à minimiser :

$$S(b) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, |b_i - b|$$

La fonction S est une fonction affine par morceaux avec une pente dépendant de la position de b parmi les b_i.

Soit $b_{(i)}$ les nombres b_i rangés par ordre décroissant et $w_{(i)}$ les coefficients associés.

Pour b compris entre $b_{(j+1)}$ et $b_{(j)}$, j = 1,…, n-1, la pente vaut :

$$\frac{S(b_{(j+1)}) - S(b_{(j)})}{b_{(j+1)} - b_{(j)}} = \sum_{i=(j+1)}^{n} w_{(i)} - \sum_{i=1}^{(j)} w_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{(i)} - 2\sum_{i=1}^{(j)} w_{(i)}$$

Et la médiane dans tout cela ? (3)

Le minimum de S(b) est donc obtenu pour $b = b_{(k)}$ où k est déterminé

par la double inégalité :

$$\sum_{i=1}^{(k-1)} w_{(i)} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i \leq \sum_{i=1}^{(k)} w_{(i)}$$

L'entier k est donc le plus petit entier vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{(k)} w_{(i)} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

La valeur $b_{(k)}$ peut être interprétée comme une « médiane » des valeurs

b_i pondérées par les poids w_i.

Bibliographie

• D'ALEMBERT, l'Encyclopédie, article FIGURE DE LA TERRE, 1756.

• EISENHART C., *Boscovich and the combination of observations* (Studies in His Life and Work, Ed. L. L. Whyte, London, 1961, pp. 200-212). Republié dans Studies in the History of the Statistics and Probability, Kendall, Plackett, Ed. Griffin, 1977, pp. 88-100.

• HALD A., *A history of parametric statistical inference from Bernoulli to Fisher, 1713-1935*, Springer, 2007, pp. 50-52.

• HILL E., *Biographical essay*, (Studies in His Life and Work, Ed. L. L. Whyte, London, 1961, pp. 17-101)

• KOENKER R., *Quantile regression*, Cambridge University Press, 2005, Chap. 1.

• LAPLACE P.S., *Sur les degrés des mesures des méridiens et sur les longueurs observées du pendule*, 1789, Oeuvres Complètes, T. 11, Paris, 1895, pp. 493-516.

• MAIRE C. et BOSCOVICH R. J., *Voyage astronomique et géographique dans l'État de L'Église etc.*, Paris, 1770.

• SHEYNIN O. B., *R. J, Boscovich's work on probability*, Arch. Hist. Exact Sci. 7, 1973, pp. 306-324.