Stage sur l'histoire des mathématiques
I.R.E.M. De Caen Basse-Normandie
session du 25 mars 2011

Les probabilités selon le texte de LAPLACE : Principes généraux du Calcul des Probabilités

Forme du texte

Le texte est une succession de dix principes élaborant une théorie des probabilités. Ces principes sont énoncés, puis appliqués à des exemples. Ces exemples sont ensuite le prétexte à une considération morale et philosophique voire une confrontation entre ces considérations et les résultats de cette théorie.
A la fin de la lecture, nous pouvons nous demander si Laplace nous invite à nous méfier de nos croyances ou de la théorie qu'il développe compte tenu de ses répercussions sur nos croyances.

Le texte est :

- Compréhensible du point de vue de son écriture
- Compréhensible au début mais très difficile du point de vue du formalisme
- Très mathématique au début puis de plus en plus philosophique vers la fin.

Les mathématiques semblent un outil pour arriver à une philosophie, confronter un point de vue d'épreuves entremêlées.

Explication mathématique **:**

Premier principe

Définition classique de la probabilité dans le cas général **:**

$$P = \frac{Nombre\,de\,cas\;favorables}{Nombre\,de\,cas\;possibles}$$

Second principe

Les cas ne sont pas équitablement possibles **:**

$$P = \sum possibilités\;de\,cas\;favorables$$

Exemple du jeu de croix ou pile :

Probabilité d' obtenir croix = $\frac{1}{2}$ et Probabilité d'obtenir pile = $\frac{1}{2}$

Soit A : « amener croix au moins une fois en deux coups »

$$P(A) = \frac{CP+CC+PC}{CP+CC+PP+PC} = \frac{3}{4}$$

Troisième principe

Conjonction d'événements indépendants

Si A et B sont indépendants alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Considération morale et philosophique

L'exemple sur lequel se base Laplace, pour effectuer sa comparaison des sciences et de la philosophie ou sciences morales, est celui la propagation d'une rumeur. Les sciences concluent que la véracité d'une rumeur décroit pour tendre vers zéro, au fur et à mesure de sa propagation, alors que les sciences morales supposent cette véracité constante.

Quatrième principe

Probabilités composées

« Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit du premier par la probabilité que cet événement étant arrivé l'autre arrivera », d'où la relation :

$$P(\text{ A et } B) = (P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A)$$

Pour prévoir les événements prochains, on utilise :

$$P(B / A) = P(A \cap B) / P(A)$$

Cinquième principe

Probabilité conditionnelle (approche chronologique)

« Si l'on calcule à priori, la probabilité de l'événement arrivé et celle de l'événement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend, la seconde divisée par la première sera la probabilité de l'événement attendu tirée de l'événement observé »

$$P(A_1 \cap A_2) / P(A_1) = P(A_2 / A_1)$$

Ce principe suppose que « prédire le futur » est inadmissible.

« Extraordinaire » signifie que les illusions ne doivent pas prendre le dessus.

Sixième principe

« Chacune des causes auquel un événement observé peut-être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance qu'il est probable que cette cause étant supposé exister l'événement aura lieu »

Probabilité des causes

Si C_1 et C_2 sont deux causes qui peuvent produire un événement E avec les probabilités $P(E/C_1)$ et $P(E/C_2)$ et si $P(E/C_1) > P(E/C_2)$,
alors les probabilités des causes C_1 et C_2 sachant que E est observé sont dans le même ordre : $P(C_1/E) > P(C_2/E)$.

La probabilité de l'existence d'une cause quelconque est une fraction :

$$P(C_1/E)=\frac{P(E/C_1)}{P(E/C_1)+P(E/C_2)}$$

Si ces causes sont inégalement probables, on a la formule :

$$P(C_1/E)=\frac{P(E/C_1)\times P(C_1)}{P(E/C_1)\times P(C_1)+P(E/C_2)\times P(C_2)}$$

Explication morale

Probabilités des causes est la probabilité des futurs événements (événements futurs)

Septième principe

C'est la formule des **probabilités totales** :

$$P(E)=P(C_1)\times P(E/C_1)+P(C_2)\times P(E/C_2)$$

Avec la relation des probabilités composées P(A $\cap$ B) = P(A/ B) P(B), elle contient la formule de Bayes donnée au principe 6:

$$P(C_1/E)=\frac{P(C_1\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E/C_1)\times P(C_1)}{P(E/C_1)\times P(C_1)+P(E/C_2)\times P(C_2)}$$

Huitième et neuvième principe

Espérance mathématique

La probabilité des événements sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence.

L'espérance signifie l'avantage de celui qui attend un bien quelconque dans des suppositions non probables.

En théorie des hasards, c'est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir.

Huitième principe

« Lorsque l'avantage dépend de plusieurs événements on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement par le bien attaché à son arrivée »

Neuvième principe

Dans une série d'événements probables, dont les uns produisent un bien et les autres une perte, on aura l'avantage qui en résulte.

Le bilan sera le produit du bien par la probabilité du gain diminué de la perte par sa probabilité.

Dixième principe

Espérance morale de Daniel Bernoulli

La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée.

G. Crave, L. Delcroix, E. Hallouard, G. Kuwata et B. Tigroussine.