UNIVERSITÉ DE CAEN BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE

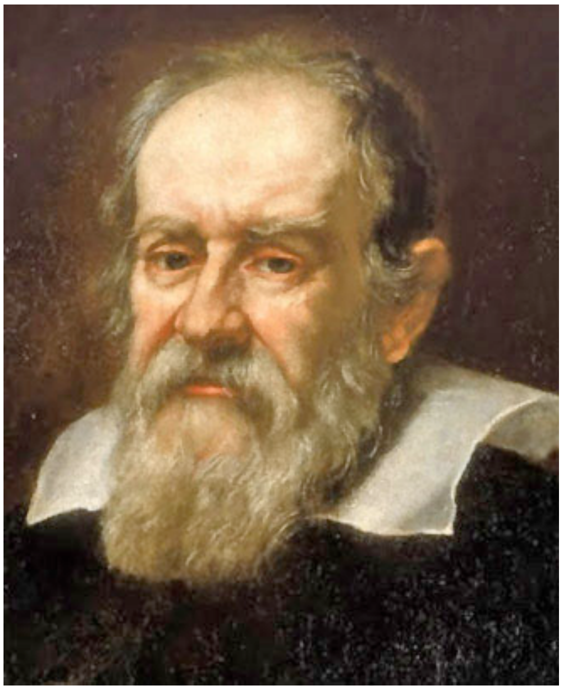
CAMPUS II – SCIENCES 3 – B. P. 5 186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 – CAEN Cédex
Tél. : 02 - 31 - 56 - 74 - 02 – Fax. : 02 - 31 - 56 - 74 - 90
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site Internet : http://www.math.unicaen.fr/irem/

Histoire des Mathématiques par leur Littérature

Aux origines du calcul des probabilités et des statistiques

Stage du PAF (11A0050134 – 20680) – 1ère Session – Vendredi 20 janvier 2012

Fascicule 1 : Recueil de textes sur les probabilités



À droite : Portrait de Galilée (1636, Justus Sustermans, 1597-1681)

À gauche : Portrait de Boscovich (1760, Robert Edge Pine, London, 1730-1788)

Document conçu par le Cercle de Lecture en Histoire des Sciences

Pré-Publication de l'IREM de B.-N. Janvier 2012

SOMMAIRE

n° de page :

* * * * *

SOURCES UTILISÉES

1. – Galileo GALILEI (Pise, 1564 – Arcetri, 1642) : "Sopra le scoperte de i dadi" (*ca.* 1620).
– Extrait de (édition consultée) : *Scritture et Frammenti di data incerta in* : *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione nazionale sotto gli auspici di sua Maestra il Re d'Italia, vol. VIII,publicata da A. Favaro*. Firenze : G. Barbera, 1898, pp. 591-594.
– Publié pour la première fois dans l'édition des *Opere di Galileo Galilei*, par Giovanni Gaetano Tartiri et Santi Franchi, Firenze, 1718.
– Traduction de l'italien de l'extrait : Didier Trotoux, Juan-Carlos et Caroline d'Amico, 2011.

2. – Christiaan HUYGENS (La Haye, 1629 – *id.*, 1695) : *De Ratiociniis in Ludo aleæ* (*Du Calcul dans les Jeux de Hasard*, 1656-7).
– Extrait des (édition consultée) : *Œuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, tome XIV, *Travaux de mathématiques pures 1655-1666, Probabilités* (D. J. Korteweg, éd. sc.), Den Haag (La Haye), Martinus Nijhoff, 1920, pp. 49-90.

3. – Abraham de MOIVRE (Vitry-le-François, 1667 – Londres, 1754) : *The Doctrine of Chances*, London, Pearson, 1718.
– Extrait de (édition consultée) : *The Doctrine of Chances*, London, Pearson, 1738, pp. 35-39. Traduction de l'extrait par Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux.

4. – Jean LE ROND d'ALEMBERT (Paris, 1717 – *id.*, 1783) : Article "Croix ou pile" [signé (*O*)] de l'*Encyclopédie* (1754).

– Extrait de (édition consultée) : *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, tome 4ème, Paris, Briasson, David, Le Breton & Durand, 1754, pp. 512 (col. 2)-513.

5. – Ruđer Josip BOSKOVIC (BOSCOVICH, Raguse, 1711 – Milan, 1787) : *Voyage Astronomique et Géographique dans l'État de l'Église* (1770).
   – Extraits de (édition consultée) : Maire, Christopher & Boscovich, R. J., *Voyage Astronomique et Géographique dans l'État de l'Église, Entrepris par l'Ordre et sous les Auspices du Pape Benoît XIV, pour mesurer deux degrés du méridien et corriger la Carte de l'État ecclésiastique*, éd. fr., Paris : Tilliard, 1770.
   – Extrait 1 : §§ n° 301, 302 et 303, pp. 480-484.
   – Extrait 2 : Note pour la fin du § n°303 du Livre 5, §§ n° 385 à 397, pp. 501-506.

6. – Marie, Jean, Antoine, Nicolas de CARITAT, marquis de CONDORCET (Ribemont, 1743 – Bourg-la-Reine, 1794) : *Élémens du Calcul des Probabilités* (1805).
   – Extrait des *Élémens du Calcul des Probabilités, et son Application aux Jeux de Hasard, à la Loterie, et aux Jugements des Hommes ; par Feu M. de Condorcet.* Paris, Chez Royez, An XIII – 1805, pp. 65-68.

7. – Sylvestre-François LACROIX (Paris, 1765 – *id.*, 1843) : "Détermination de la probabilité *a posteriori*" (1816).
   – Extrait de (édition consultée) : *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités*, Paris, Chez Mme Vve Courcier, 1816, *Section seconde*, §§ 80-81, pp. 132-136.

En annexe.
– Jean-François PICHARD : "Frise historique sur la probabilité et la statistique. Bref aperçu du développement des théories probabiliste et statistique", extrait de : HENRY, Michel (coord.), *Autour de la Modélisation en Probabilités,* coll. "*Didactiques*", Besançon, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2001.

*
*   *

Galileo GALILEI (Pise, 1564 – Arcetri, 1642) :

“Sopra le scoperte de i dadi”, extrait de *Scritture et Frammenti di data incerta in* : *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione nazionale sotto gli auspici di sua Maestra il Re d'Italia, vol. VIII,publicata da A. Favaro,* Firenze : G. Barbera, 1898, pp. 591-594.

Publié pour la première fois dans l'édition des *Opere di Galileo Galilei,* par Giovanni Gaetano Tartiri et Santi Franchi, Firenze, 1718.

Traduction de l'italien : Didier Trotoux, Juan-Carlos et Caroline d'Amico, 2011.

À propos d'une recherche sur le jeu de dés

Le fait que dans le jeu de dés, certaines sommes de points sont plus avantageuses que d'autres, a une raison en soi très évidente, à savoir que certaines se produisent plus facilement et plus fréquemment que d'autres ce qui dépend du fait qu'elles peuvent être formées avec plusieurs sortes de nombres.

Ainsi le 3 et le 18 qui sont des sommes qui ne peuvent être obtenues que d'une seule manière, à savoir avec un triple 6 pour la deuxième et un triple as pour la première et d'aucune autre façon, sont plus difficiles à réaliser qu'un 6 ou un 7, qui peuvent se décomposer de plusieurs manières, à savoir 1-2-3, 2-2-2, 1-1-4 pour le 6 et 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3, 2-2-3 pour le 7. Néanmoins, bien que le 9 et le 12 peuvent être décomposés d'autant de manières que le 10 et le 11, et qu'ils devraient être considérés d'obtention égale, il est connu qu'une longue observation a conduit les joueurs de dés à estimer le 10 et le 11 plus avantageux que le 9 et le 12. Et il est évident que le 9 et le 10 peuvent être formés avec une même diversité de nombres (et ceci est aussi vrai des totaux 12 et 11 correspondant au totaux des faces opposées) : parce que, le 9 peut être décomposé en 1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3 qui sont six tripartitions ; et le 10 en 1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4, et d'aucune autre manière, qui sont aussi six combinaisons. Maintenant, pour rendre service à celui qui m'a demandé d'expliquer ce que je peux dire d'une telle difficulté, je vais exposer ma pensée, dans l'espoir non seulement de résoudre ce problème, mais aussi d'ouvrir un chemin pour faire apparaître de la manière la plus précise les raisons pour lesquelles toutes les caractéristiques du jeu ont été réparties et mises au point avec une grande perspicacité et bon sens.

Et pour arriver à mon but avec la plus grande clarté possible, je commence par considérer qu'un dé possède 6 faces, et qu'une fois jeté, il peut tomber indifféremment sur chacune d'entre elles : il y a 6 résultats possibles et pas plus, chacun différent des autres. Mais si nous jetons avec le premier, un second dé qui possède lui aussi 6 faces, nous pourrons obtenir 36 résultats tous différents, car chaque face du premier dé peut se combiner avec chaque face du second dé et par conséquent produire six résultats différents ; d'où il est évident que de telles combinaisons sont au nombre de 6 fois 6, soit 36. Et si nous ajoutons le troisième dé, vu que chacune de ses 6 faces peut se combiner avec chacun des 36 résultats des deux autres dés, nous obtiendrons pour 3 dés, 6 fois 36 soit 216 résultats, tous différents les uns des autres. Mais parce que les sommes des points de 3 dés ne sont qu'au nombre de 16, à savoir 3-4-5 etc. jusqu'à 18, parmi lesquelles les 216 résultats doivent se répartir, il est nécessaire que pour certaines d'entre elles, de nombreuses combinaisons se produisent ; et si nous retrouvons combien de combinaisons se produiront pour chaque somme, nous aurons ouvert la voie pour trouver ce que nous cherchons : et il suffira de faire une telle recherche pour les sommes de 3 à 10, parce que ce qui convient à un de ces nombres convient aussi à la somme des faces opposées.

Trois points particuliers doivent être notés pour une compréhension claire de ce qui suit. Premièrement, la somme des points de trois dés, composée de 3 nombres semblables, ne peut être obtenue que par un seul jet : ainsi le 3 ne peut être produit que par 3 as ; et le 6 quand il est obtenu avec 3 deux, ne peut être produit que d'un seul jet. Deuxièmement, la somme des points de trois dés produite avec trois nombres dont deux sont égaux et le troisième est différent, peut être obtenue par 3 jets : par exemple, le 4 qui est engendré à partir du 2 et de deux as, peut être obtenu de 3 jets différents ; à savoir, quand on obtient un 2 avec le premier dé et un as avec le deuxième et le troisième ; quand on obtient un 2 avec le deuxième dé et un as avec le premier et le troisième ; et enfin, quand on obtient un 2 avec le troisième et un as avec les deux premiers. Ainsi, par exemple le 8 obtenu par le résultat 3-3-2, peut être produit de 3 manières : à savoir, quand on obtient un 2 avec le premier dé et un 3 avec le deuxième et le troisième ; quand on obtient un 2 avec le deuxième dé et un 3 avec le premier et le troisième ; et enfin, quand on obtient un 2 avec le troisième et un 3 avec les deux premiers. Troisièmement, la somme des points de trois dés formée de trois nombres distincts, peut être obtenue de 6 manières différentes. Comme par exemple, pour le 8 obtenu avec les nombres 1-3-4 peut être réalisé par 6 jets distincts : 1°, quand on obtient un 1 avec le premier dé, un 3 avec le second et un 4 avec le troisième ; 2°, quand on obtient un 1 avec le premier dé, un 4 avec le second et un 3 avec le troisième ; 3°, quand on obtient un 1 avec le second dé, un 3 avec le premier et un 4 avec le troisième ; 4°, quand on obtient un 1 avec le second dé, un 4 avec le premier et un 3 avec le troisième ; 5°, quand on obtient un 1 avec le troisième dé, un 3 avec le premier et un 4 avec le deuxième ; 6°, quand on obtient un 1 avec le troisième dé, un 4 avec le premier et un 3 avec le deuxième.

Nous avons ainsi énoncé trois principes : premièrement, les tripartitions, c'est-à-dire les résultats des jets de trois dés, composés de 3 nombres égaux ne s'obtiennent que d'une seule manière ; deuxièmement, les tripartitions composés de 2 nombres égaux et d'un troisième différent, s'obtiennent de 3 manières ; troisièmement, les tripartitions composés de 3 nombres distincts, s'obtiennent de 6 manières. De ces principes, nous pouvons déduire de combien de manières ou plutôt de combien de jets différents, peuvent être obtenues toutes les sommes des points de trois dés, ce qui peut être facilement compris à l'aide de la table suivante : en haut sont notées les sommes des points de 10 en décroissant jusqu'à 3, et en dessous de celles-ci figurent les différentes tripartitions qui peuvent en résulter ; à côté desquelles figurent les nombres de façons selon lesquelles chaque partition peut se diversifier et tout en bas figure la somme totale de toutes les manières possibles de produire ces sommes de points.

10		**9**		**8**		**7**		**6**		**5**		**4**		**3**		**1** **3**
6.3.1.	6	6.2.1.	6	6.1.1.	3	5.1.1.	3	4.1.1.	3	3.1.1.	3	2.1.1.	3	1.1.1.	1	6
6.2.2.	3	5.3.1.	6	5.2.1.	6	4.2.1.	6	3.2.1.	6	2.2.1.	3					10
5.4.1.	6	5.2.2.	3	4.3.1.	6	3.3.1.	3	2.2.2.	1							15
5.3.2.	6	4.4.1.	3	4.2.2.	3	3.2.2.	3									21
4.4.2.	3	4.3.2.	6	3.3.2.	3											25
4.3.3.	3	3.3.3.	1													27
	27		25		21		15		10		6					108

Ainsi, par exemple, dans la première case, nous avons une somme de points de 10, et en-dessous les 6 tripartitions permettant d'obtenir cette somme, qui sont 6-3-1, 6-2-2, 5-4-1, 5-3-2, 4-4-2, 4-3-3 : et comme la première tripartition 6-3-1 est composée de 3 nombres différents, elle est peut être produite (comme énoncé ci-dessus) par 6 jets différents : c'est pourquoi on note 6 à droite de la tripartition 6-3-1 : et comme la deuxième 6-2-2 est composée de deux nombres égaux et d'un autre différent, elle peut être produite par 3 jets différents : c'est pourquoi on note 3 à sa droite : la troisième tripartition 5-4-1, composée de 3 nombres différents peut être produite par 6 jets différents : c'est pourquoi on note 6 à sa droite : et de même pour toutes les autres. Et enfin, on fait figurer la somme de tous ces nombres au pied de cette petite colonne : d'où l'on peut voir que la somme de 10 peut être obtenue à partir de 27 jets de dés différents ; mais la somme de 9 de 25 jets seulement, celle de 8 de 21 jets, celle de 7 de 15 jets, celle de 6 de 10 jets, celle de 5 de 6 jets, celle de 4 de 3 jets et enfin celle de 3 d'un seul jet : tous ces nombres de jets ajoutés ensemble donnent un total de 108 ; et les nombre de jets pour les totaux des faces opposés, c'est-à-dire 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, étant les mêmes, on arrive à un total de 216 jets de 3 dés. Et à partir de cette table, chaque personne qui comprend le jeu, pourra calculer, de la manière la plus précise, tous les avantages, aussi minimes soient-ils, des résultats des jets, des combinaisons et de n'importe quelle autre règle particulière et clause, qui est observée dans ce jeu, etc.

*

*   *

Christiaan HUYGENS (La Haye, 1629 – *id.*, 1695) :

Extrait du *De Ratiociniis in Ludo aleæ* (*Du Calcul dans les Jeux de Hasard*, 1656-7), d'après l'édition des *Œuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, tome XIV, *Travaux de mathématiques pures 1655-1666, Probabilités* (D. J. Korteweg, éd. sc.), Den Haag (La Haye), Martinus Nijhoff, 1920, pp. 49-90.

À l'égard des dés, on peut poser ces questions : à savoir en combien de fois l'on peut accepter de jeter avec un dé un 6 ou bien un des autres nombres ; de même en combien de fois 2 six avec 2 dés ou 3 six avec 3 dés. Et bien d'autres questions encore. Pour les résoudre, il faut remarquer ce qui suit.

D'abord qu'on peut faire avec un dé six coups différents également vraisemblables. Car je suppose que le dé a la forme d'un *Cube* parfait.

Ensuite qu'on peut faire 36 coups différents avec 2 dés, lesquels ont aussi des vraisemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième peut se combiner. Et 6 fois 6 font 36.

De même qu'il y a 216 coups de 3 dés. Car avec chacun des 36 coups des 2 dés peut se combiner l'un quelconque des 6 coups du troisième. Et 6 fois 36 font 216.

On trouve de la même façon qu'il y a 6×216 ou 1296 coups de quatre dés ; et qu'on peut en continuant ainsi calculer le nombre de coups pour un nombre quelconque de dés : on multiplie par 6 le nombre précédent de coups, chaque fois qu'on ajoute un nouveau dé.

Ensuite, il faut savoir qu'avec deux dés on ne peut faire qu'un coup de 2 ou de 12 points, et 2 coups de 3 ou de 11 points. En effet, si nous appelons les dés A et B respectivement, il est évident que pour jeter 3 points A peut donner un as et B un 2, ou bien B un as et A un 2. De même pour obtenir 11 points, A peut donner 5 et B 6, ou bien A 6 et B 5. Le coup de 4 points est triple, savoir A 1, B 3, ou A 3, B 1, ou A 2, B 2. Le coup de 10 points est également triple. Celui de 5 ou de 9 points, quadruple. Celui de 6 ou de 8 points, quintuple. Celui de 7 points, sextuple.

$$\text{Avec 3 dés l'on trouve pour } \left\{\begin{matrix} 3 \text{ ou } 18 \\ 4 \text{ ou } 17 \\ 5 \text{ ou } 16 \\ 6 \text{ ou } 15 \\ 7 \text{ ou } 14 \\ 8 \text{ ou } 13 \\ 9 \text{ ou } 12 \\ 10 \text{ ou } 11 \end{matrix}\right\} \text{ points } \left\{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{matrix}\right\} \text{ coups différents.}$$

*
* *

Abraham de MOIVRE (Vitry-le-François, 1667 – Londres, 1754) :
The Doctrine of Chances, London, Pearson, 1718
Extrait de l'édition de 1738, pp. 35-39.
Traduction de l'anglais : Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux.

// p. 35 //

Maintenant, dans le but de proposer une plus grande variété d'Exemples pour mettre cette Règle en pratique, j'ai pensé mettre ici en annexe, un *Lemme* que j'ai publié pour la première fois en l'an 1711, et dont, pour des raisons particulières, la recherche a été différée jusqu'à ce que je l'ai donné dans mes *Miscellanea Analytica* de l'an 1731.

LEMME.

Pour trouver combien de Chances[1] il y a, avec un nombre quelconque de Dés, chacun d'eux ayant le même nombre de Faces, de lancer [les dés et obtenir][2] un nombre quelconque donné de points.

SOLUTION.

Soient $p+1$ le nombre de points donné, n le nombre de Dés, f le nombre de Faces de chaque Dé : posons $p-f=q$, $q-f=r$, $r-f=s$, $s-f=t$, &c. ; alors le nombre de Chances requis sera

$$\begin{aligned}
&+\tfrac{p}{1}\times\tfrac{p-1}{2}\times\tfrac{p-2}{3},\ \&\text{c.}\\
&-\tfrac{q}{1}\times\tfrac{q-1}{2}\times\tfrac{q-2}{3},\ \&\text{c.}\times\tfrac{n}{1}\\
&+\tfrac{r}{1}\times\tfrac{r-1}{2}\times\tfrac{r-2}{3},\ \&\text{c.}\times\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\\
&-\tfrac{s}{1}\times\tfrac{s-1}{2}\times\tfrac{s-2}{3},\ \&\text{c.}\times\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\\
&+\ \&\text{c.}
\end{aligned}$$

[Expression] Dont la Série doit être continuée jusqu'à ce qu'un certain Facteur dans chaque produit devienne soit nul, soit négatif. // p. 36 //

N. B. Il faut prendre autant de facteurs dans chacun des produits $\frac{p}{1}\times\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}$, &c. $\frac{q}{1}\times\frac{q-1}{2}\times\frac{q-2}{3}$, &c. qu'il y a d'Unités dans $n-1$.

[1°.] Ainsi par exemple, qu'il soit requis de trouver combien de Chances on a de lancer 16 Points avec quatre Dés [cubiques][3] ; alors, faisant $p+1=16$, nous avons $p=15$, d'où [il vient que] le nombre de Chance requis se trouvera être

$$\begin{aligned}
&+\tfrac{15}{1}\times\tfrac{14}{2}\times\tfrac{13}{3} &&=+\ 455\\
&-\tfrac{9}{1}\times\tfrac{8}{2}\times\tfrac{7}{3}\times\tfrac{4}{1} &&=-\ 336\\
&+\tfrac{3}{1}\times\tfrac{2}{2}\times\tfrac{1}{3}\times\tfrac{4}{1}\times\tfrac{3}{2} &&=+\quad 6
\end{aligned}$$

---

[1] Le mot "Chance", qui intervient dans le titre même du traité, doit être entendu, ici et dans la suite, comme : "cas favorable" ou "occurrence" rencontrée ou effective.

[2] L'auteur utilise l'infinitif, le participe passé ou le gérondif du verbe "to throw", qui signifie "jeter" ou "lancer", s'agissant du jeu de dés, assimilant l'action et son résultat, et en outre sans distinction entre combinaison de faces ou somme des points.

[3] Ce point n'est pas précisé par de Moivre dans l'extrait proposé.

Mais 455 – 336 + 6 = 125, et par conséquent, cent vingt-cinq est le nombre de Chances requis.

[2°.] Derechef, soit requis de trouver le nombre de Chances pour lancer vingt et sept Points avec six Dés ; l'opération donnera

$$\begin{array}{ll} +\frac{26}{1}\times\frac{25}{2}\times\frac{24}{3}\times\frac{23}{4}\times\frac{22}{5} & =+\ 65780 \\ -\frac{20}{1}\times\frac{19}{2}\times\frac{18}{3}\times\frac{17}{4}\times\frac{16}{5}\times\frac{6}{1} & =-\ 93024 \\ +\frac{14}{1}\times\frac{13}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{11}{4}\times\frac{10}{5}\times\frac{6}{1}\times\frac{5}{2} & =+\ 30030 \\ -\frac{8}{1}\times\frac{7}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{4}{3} & =-\ 1120 \end{array}$$

D'où, par conséquent, 65 780 – 93 024 + 30030 – 1 120 = 1 666 est le nombre de Chances requis.

3°. Soit encore requis d'assigner le nombre de Chances pour le lancer de quinze points avec six Dés.

$$\begin{array}{ll} +\frac{14}{1}\times\frac{13}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{11}{4}\times\frac{10}{5} & =+\ 2002 \\ -\frac{8}{1}\times\frac{7}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{1} & =-\ 336 \end{array}$$

Mais 2 002 – 336 = 1 666 qui est le nombre requis.

COROLLAIRE.

Tous les points également distants des Extrêmes, c'est-à-dire des moindre et plus grand nombres de Points qui se trouvent sur le Dé, ont le même nombre de Chances à l'occasion desquelles ils peuvent être produits ; par voie de conséquence, si le nombre de points donné est plus proche du plus grand Extrême que du moindre, on suppose que le nombre de points donné // p. 37 // soit soustrait de la Somme des Extrêmes, et on travaille avec le reliquat : et l'Opération s'en trouvera raccourcie.

Ainsi, s'il est requis de trouver le nombre de Chances pour le lancer de 27 Points avec 6 Dés : soustrayons 27 de 42, Somme des Extrêmes 6 et 36 ; le reste résultant est 15 ; il est alors possible de conclure que le nombre de Chances pour le lancer de 27 points est le même que pour le lancer de 15 Points.

Bien que, comme je l'ai dit plus haut, la Démonstration de ce Lemme puisse être tirée de mes *Miscellanea*, j'ai cependant pensé opportun, à la demande de quelques Amis, de la transcrire en cet endroit.

1°. Imaginons qu'un Dé soit constitué de telle façon qu'il y aurait sur lui un certain nombre de Faces, toutes marquées I ; et posons que le nombre de ces Faces soit nommé r ; 2°. Imaginons qu'il y ait [un nombre] des Faces marquées II, tel qu'il serait nommé rr ; 3°. Imaginons qu'il y ait des Faces marquées III, [en nombre] tel qu'il serait nommé par r^3, et ainsi de suite ; ce qui étant fait, la Progression géométrique $1 + r + rr + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8$, &c. continuée en autant de Termes qu'il y a de Dénominations différentes sur le Dé, de sorte que cette Progression représente toutes les Chances d'un Dé : cela étant supposé, il est vraiment clair qu'afin d'avoir toutes les Chances de deux Dés, cette Progression doit être élevée à son Carré, et que pour avoir toutes les Chances de trois Dés, la même Progression doit être élevée à son Cube ; et plus généralement, que si le nombre de Dés est exprimé par n, cette Progression doit en conséquence être élevée à la Puissance n : Maintenant supposons que le nombre de Faces dans chaque Dé soit f, alors la Somme de cette Progression sera $\frac{1-r^f}{1-r}$, et par conséquent toutes les Chances qui peuvent advenir avec ces n Dés, seront exprimées par les termes de la Série qui résultera de Fraction $\frac{1-r^f}{1-r}$ élevée à la puissance n ; mais comme le moindre nombre de Points que l'on peut lancer avec n Dés est de n Unités, et que le successeur immédiat et plus grand est $n + 1$, et le suivant $n + 2$, &c., il est clair que le premier Terme de la Série représentera le nombre de Chances pour le lancer de n Points, et que le second Terme de la Série représentera le nombre de Chances pour le lancer de $n + 1$ Points, et ainsi de suite. Et que donc, si le Nombre de Points à [l'issue d'un] lancer est exprimé par $p + 1$, cela ne sera pas sans assigner un Terme à la Série, duquel la distance au premier sera exprimée par $p + 1 - n$. // p. 38 //

Mais la Série qui résulte de l'élévation de la Fraction $\frac{1-r^f}{1-r}$ à la puissance n, est le produit de deux autres séries, dont l'une est $1+nr+\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}rr+\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}r^3$, &c. et l'autre est $1-nr^f+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}r^{2f}-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}r^{3f}$, &c. C'est pourquoi, si ces deux Séries sont multipliées entre elles, tous les Termes du Produit répondront solidairement aux divers nombres de Chances qui adviennent avec n Dés.

Et par conséquent, si le nombre de Points [consécutif] à [un] lancer est exprimé par $p + 1$, il n'advient que par la collecte de tous les Termes qui sont affectés par la puissance r^{p+1-n}, et la Somme de tous ces Termes répondra à la Question proposée.

Mais dans le but de trouver facilement tous les termes qui sont affectés par la puissance r^{p+1-n}, supposons, par souci d'abréviation, $p + 1 - n = l$; maintenant supposons en outre que Er^l soit ce Terme, dans la première Série, duquel la distance depuis son premier terme est l ; posons aussi que Dr^{l-f} est le terme, dans la première série, duquel la distance depuis son premier terme est $l - f$, et de même que Cr^{l-2f} est le terme, dans la première Série, duquel la distance à son premier terme est dénoté par $l - 2f$, et ainsi de suite, faisant perpétuellement une régression vers le premier Terme. Ces choses étant fixées, écrivons tous ces Termes dans l'ordre, ainsi

$$\mathrm{E}r^l + \mathrm{D}r^{l-f} + \mathrm{C}r^{l-2f} + \mathrm{B}r^{l-3f}, \text{ \&c.}$$

et écrivons en dessous les Termes de la seconde Série dans leur ordre naturel. Ainsi

$$\mathrm{E}r^l + \mathrm{D}r^{l-f} + \mathrm{C}r^{l-2f} + \mathrm{B}r^{l-3f}, \text{ \&c.}$$
$$1-nr^f+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}r^{2f}-\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}r^{3f}, \text{ \&c.}$$

puis multipliant chaque Terme de la première Série par chaque Terme correspondant de la seconde, tous les Termes du produit, à savoir

$$\mathrm{E}r^l - n\mathrm{D}r^l + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\mathrm{C}r^l - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\mathrm{B}r^l, \text{ \&c.}$$

seront affectés de la même puissance r^l.

Maintenant le Coefficient E contenant autant de facteurs $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, &c. qu'il y a d'Unités dans l, il est clair que, quand les Dénominateurs de ces facteurs sont continués jusqu'à un certain nombre d'entre eux, dénommé $n - 1$, et qu'alors les Dénominateurs suivants seraient n, $n + 1$, $n + 2$, &c., du fait qu'ils sont les mêmes que les premiers Termes des Numérateurs, il s'ensuit que, de la valeur du Coefficient E, doivent être rejetés ces Numérateurs et Dénominateurs // p. 39 // qui sont égaux, et qu'il restera, pour les numérateurs écrits en ordre inverse les Termes $n + l - 1$, $n + l - 2$, $n + l - 3$, &c. dont le dernier sera $l + 1$; et qu'il restera, pour les Dénominateurs écrits dans leur ordre naturel, 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont le dernier sera $n - 1$, toutes choses qui dépendent entièrement de la nature d'une Progression Arithmétique. En conséquence le premier Terme

$$\mathrm{E}r^l \text{ est} = \frac{n+l-1}{1} \times \frac{n+l-2}{2} \times \frac{n+l-3}{3} \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{l+1}{n-1} r^l.$$

Maintenant, en lieu et place[4] de l, substituons sa valeur $p+1-n$, alors $\mathrm{E}r^l = \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, &c. $\times r^l$, et de la même manière, le second Terme

$$-n\mathrm{D}r^l \text{ sera} = -\frac{p-f}{1} \times \frac{p-f-1}{2} \times \frac{p-f-2}{3}, \text{ \&c.} \times nr^l,$$

et il vient aussi que le troisième Terme

$+\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \mathrm{C}r^l$ sera $= + \frac{p-2f}{1} \times \frac{p-2f-1}{2} \times \frac{p-3f-2}{3}$, &c. $\times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^l$, et ainsi de suite. Supposons maintenant que $r=1$, $p-f=q$, $q-f=r$, $r-f=s$, &c. alors vous obtiendrez précisément la Règle que nous avons donnée dans notre Lemme.

Maintenant, pour ajouter un exemple supplémentaire à notre troisième Problème, posons qu'il soit requis de trouver en combien de lancers de 6 Dés, on peut espérer lancer 15 points exactement.

Le nombre de Chances pour lancer 15 points étant 1 666, et le nombre total des Chances pour 6 Dés étant de 46 656, il suit que le nombre de Chances pour faillir [à la condition requise] est de[5] 44 9[9]0 ; en conséquence, divisant 44 9[9]0 par 1 666, et le quotient étant 27 ou peu s'en faut, multiplions 27 par 0,7, le produit 18,9 montrera que le nombre de lancers requis à cet effet sera très proche de 19.

*
* *

4 Le mot utilisé par de Moivre est "room". Il faut très probablement entendre ce mot comme une "boîte noire", dans laquelle on place toute valeur de la variable, en particulier ici, la valeur $p+1-n$, à laquelle on avait substitué l, par abréviation. L'idée d'inconnue ou de variable, comme "boîte noire" en algèbre est ici confirmée par l'usage du mot chambre, requis par ailleurs pour désigner les "chambres noires" des lanternes magiques et autres "chambres claires" de la mise au carreau sur le motif par les dessinateurs : la pédagogie et la didactique n'ont donc rien inventé qui ne soit présent dès les fondations. Mais on peut aussi parler de "cellule" dans la série, ou tout simplement de "place" ou d'emplacement – ce que nous avons retenu –, tous termes qui filent la même métaphore du contenant/contenu ou du signifiant/signifié.

5 Le texte donne : "44 960".

Jean LE ROND d'ALEMBERT (Paris, 1717 – *id.*, 1783) :

Article "Croix ou pile" [signé (*O*)] de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, tome 4ème, Paris, Briasson, David ,Le Breton & Durand, 1754, pp. 512 (col. 2)-513.

Texte établi et réorthographié par J.-P. Le Goff.

// p. 512, col. 2 // […]

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards*) Ce jeu qui est très connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons,

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons une seule fait perdre & trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la piece. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons dont une seule fait perdre, & sept font gagner ; ainsi il y aurait 7 contre 1 à parier. *Voyez* **COMBINAISON & AVANTAGE.** Cependant cela est-il bien exact ? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne // p. 513, col. 1 // faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *croix* au premier coup ? Car dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup.
Pile, Croix, premier & second coup.
Pile, pile, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, on trouvera

Croix.
Pile, croix.
Pile, pile, croix.
Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier : ceci est digne, ce me semble de l'attention des Calculateurs, & irait à réformer bien des regles unanimement reçues sur les jeux de hasard.

Autre question. Pierre joue contre Paul à cette condition, que si Pierre amène *croix* du premier coup, il payera un écu à Paul ; s'il n'amène croix qu'au second coup, deux écus ; si au troisième coup, quatre, & ainsi de suite. On trouve par les règles ordinaires (en suivant le principe que nous venons de poser), que l'espérance de Paul, & par conséquent ce qu'il doit mettre au jeu est $\frac{1 + 2 + 4 + \&c.}{1 + 1 + 1\ \&c.}$ quantité qui se trouve infinie. Cependant il n'y a personne qui voulût mettre à ce jeu une somme un peu considérable. On peut voir dans les *Mémoires de l'Académie de Petersbourg, tome V.* quelques tentatives pour résoudre cette difficulté ; mais nous ne savons si on en sera satisfait ; & il y a ici quelque scandale qui mérite bien d'occuper les Algébristes. Ce qui paraît surprenant dans la solution de ce problème, c'est la quantité infinie que l'on trouve pour l'espérance de Paul. Mais on remarquera que l'espérance de Paul doit être égale au risque de Pierre. Ainsi il ne s'agit que de savoir si le risque de Pierre est infini, c'est-à-dire (suivant la véritable notion d'infini) si ce risque est tel qu'on puisse toujours le supposer plus grand qu'aucun nombre fini assignable. Or pour peu qu'on réfléchisse à la question, on verra que ce risque est tel en effet. Car ce risque augmente avec le nombre des coups, comme il est très évident par le calcul. Or le nombre des coups peut aller & va en effet à l'infini, puisque par les conditions du jeu le nombre n'est pas fixé. Ainsi le nombre indéfini des coups est une des raisons qui font trouver ici le risque de Pierre infini. *Voyez* **ABSENT** *&* **PROBABILITÉ.**

Selon un très savant géomètre avec qui je raisonnais un jour sur cette matière, l'espérance de Paul & son enjeu ne peu[ven]t jamais être infini, parce que le bien de Pierre ne l'est pas ; & que si Pierre n'a, par exemple, que 2^{20} écus de bien, il ne doit y avoir que 21 coups, après lesquels on doit cesser, parce que Pierre ne sera pas en état de payer. Ainsi le nombre des coups possibles est déterminé, fini, & égal à 21, & on trouvera que l'espérance de Paul est $\frac{2^{21}-1}{2^{2}}$. Quoique cette somme ne soit plus infinie, je doute que jamais aucun joueur voulût la donner. Ainsi cette solution, toute ingénieuse qu'elle est, ne paraît pas d'abord résoudre la difficulté. Cependant toutes choses bien examinées, il me semble qu'on doit en être satisfait. Car il ne s'agit pas ici de la peine ou de la facilité que Paul doit avoir à risquer la somme en question, il s'agit de ce qu'il doit donner pour jouer à jeu égal avec Pierre ; & il est certain que ce qu'il doit donner est la somme ci-dessus. Paul serait un fou sans doute de la donner ; mais il ne le serait, que parce que Pierre est un fou aussi de proposer un jeu où lui Pierre peut perdre en une // p. 513, col. 2 // minute des sommes immenses. Or, pour jouer avec un fou à jeu égal, il faut se faire fou comme lui. Si Pierre jouant en un seul coup, pariait un million qu'il amènera *pile,* il faudrait que chacun mît au jeu un demi-million : cela est incontestable. Il n'y a pourtant que deux insensés qui pussent jouer un pareil jeu.

Nous remarquerons à cette occasion, que pour rendre plus complètes, & pour ainsi dire plus usuelles, les solutions de problèmes concernant les jeux, il serait à souhaiter qu'on pût y faire entrer les considérations morales, relatives, soit à la fortune des joueurs, soit à leur état, soit à leur situation, à leur force même (quand il s'agit des jeux de commerce), & ainsi du reste. Il est certain, par exemple, que de deux hommes inégalement riches qui jouent à jeu égal suivant les règles ordinaires, celui qui est le moins riche risque plus que l'autre. Mais toutes ces considérations étant presque impossibles à soumettre au calcul à cause de la diversité des circonstances, on est obligé d'en faire abstraction, & de résoudre les problèmes mathématiquement, en supposant d'ailleurs les circonstances morales parfaitement égales de part & d'autre, ou en les négligeant totalement. Ce sont ensuite ces circonstances, quand on vient à y faire attention, qui font croire le calcul en faute, quoiqu'il n'y soit pas. *Voyez* **AVANTAGE, JEU, PARI,** *&c.* (*O*)

*

* *

BOSKOVIC, Ruđer Josip (BOSCOVICH, Raguse, 1711 – Milan, 1787) :

Extraits de : Maire, Christopher & Boscovich, R. J., *Voyage Astronomique et Géographique dans l'État de l'Église, Entrepris par l'Ordre et sous les Auspices du Pape Benoît XIV, pour mesurer deux degrés du méridien et corriger la Carte de l'État ecclésiastique*, éd. fr., Paris : Tilliard, 1770.

Extrait 1 : §§ n° 301, 302 et 303, pp. 480-484

Extrait 2 : Note pour la fin du § n°303 du Livre 5, §§ n° 385 à 397, pp. 501-506

[Extrait 1.]

// p. 480 // [En marge gauche :] Explication / des deux ta-/ bles suivan-/ tes.

301. Je proposerai donc deux tables : la première a sept colonnes dont la première contient par ordre les noms des degrés ; la seconde, leur latitude ; la troisième, la moitié du sinus verse d'une latitude double ; la quatrième, le nombre // p. 481 // de toises de chaque degré ; la cinquième leur excès sur le premier degré dont la latitude = 0 ; la sixième, ce même excès calculé dans l'hypothèse d'une proportionnalité avec les sinus verses ; la septième, l'erreur ou la différence de l'excès calculé à l'excès observé. Cette première table nous donnera le moyen de construire la seconde, qui n'a que trois colonnes ; dont la première contient les rang des degrés combinés ; la seconde, l'excès qu'on en conclut pour un degré sous le pôle sur un degré proche de l'équateur ; la troisième, la fraction que donne le tiers de cet excès divisé par le premier degré, c'est-à-dire l'ellipticité. L'excès du degré de M. l'Abbé *de la Caille* sur le nôtre, prouve l'allongement de la figure. C'est pour cela que dans la seconde table j'ai marqué du signe négatif sa différence & son ellipticité comparée à celle de notre // p. 482 // degré, & que j'ai donné le même signe à son erreur dans la première table que voici.

Dégré.	Latitude.	$\frac{1}{2}$ sin. vers. pour un ray. de 10000.	Nombre de toises.	Différence au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
De Quito . . .	0°. 0′	0	56751	0	0	0
Du Cap de B.E.	33 . 18	2987	57037	286	240	—46
De Rome . . .	42 . 59	4648	56979	228	372	144
De Paris . . .	49 . 23	5762	57074	323	461	138
De Lapponie .	66 . 19	8386	57422	671	671	0 (1)

[Table 1.]

[En marge gauche :] Irrégularité / de la premiè-/ re.

302. Dans la dernière colonne de cette table on voit de combien les degrés intermédiaires s'écartent de la raison doublée des sinus des latitudes doubles, supposé que le premier & le dernier // p. 483 // soient justes. La différence calculée du troisième et du quatrième degré étant positive, celle du second est négative. Quand même il arriverait quelque léger changement dans le premier & le dernier degré, le second ne s'éloignerait pas sensiblement de ce rapport. Il n'en est pas ainsi du troisième & du quatrième : la différence est déjà trop sensible pour qu'on puisse les concilier avec la raison doublée. Voyons maintenant dans la seconde table l'excès

du dernier degré sur le premier provenant de la comparaison des degrés pris deux à deux, & l'ellipticité qui en résulte.

Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle fur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.	Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle fur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.
1 . 5	800	$\frac{1}{213}$	2 . 4	133	$\frac{1}{128}$
2 . 5	713	$\frac{1}{239}$	3 . 4	853	$\frac{1}{200}$
3 . 5	1185	$\frac{1}{144}$	1 . 3	491	$\frac{1}{347}$
4 . 5	1327	$\frac{1}{128}$	2 . 3	—350	$-\frac{1}{486}$
1 . 4	542	$\frac{1}{314}$	1 . 2	957	$\frac{1}{78}$

[Table 2.]

[En marge droite :] Irrégularité / de la seconde.

303. […] Or on voit par cette table quelle est l'irrégularité des // p. 484 // degrés, puisqu'ils donnent des combinaisons si différentes. Si l'on prend un milieu entre ces dix combinaisons, le tiers de l'excès moyen sera 222, qui donne pour ellipticité $\frac{1}{155}$. Mais si on rejette la sixième et la neuvième qui sont si différentes des autres, & dont les degrés sont peu éloignés entre eux, le milieu sera 286, & l'ellipticité $\frac{1}{198}$. Mais ce milieu même diffère encore beaucoup de plusieurs d'entre ces huit déterminations (1).

[…]

---

(1) La note relative à ce n°. est trop longue pour pouvoir être insérée ici : on a jugé plus à propos de la mettre à la fin de ce Livre en forme d'appendi[ce].

* * * * *

[Extrait 2.]

// p. 501 //

N O T E

POUR la fin du N°. 303, Liv. V.

On doit tirer une certaine ellipticité moyenne de tous les degrés connus par les observations, comparés entre eux, en ayant égard au rapport que doivent avoir leurs différences, & aux règles de la probabilité touchant la correction qu'il convient de faire pour les réduire à ce rapport. Le P. *Boscovich* l'a fait dans un autre ouvrage au moyen d'une méthode très curieuse, & qui peut servir en plusieurs autres cas. Il en a exposé le résultat dans un extrait inséré dans les actes de l'Institut de *Bo[u]logne*. Il la développe dans ses *Suppléments de la Philosophie* en vers latins, composé[s] depuis peu par M. Beno[î]t *Stay*, *tome* 1, *page* 420. Nous insérons ici cet article en entier. Le P. *Boscovich* y emploie les nombres pris de la table qui est à la fin de la page 407 de ces *Suppléments* : c'est la même que celle qu'il a mise dans ce Livre V, n°. 301, & à laquelle nous avons substitué une plus ample dans la note sur ce même numéro. Nous appliquerons ensuite sa méthode à cette nouvelle table. Voici l'endroit en question.

« 385. Mais pour prendre ce milieu, tel qu'il ne soit pas simplement un milieu arithmétique, mais qu'il soit plié par une certaine loi aux règles des combinaisons fortuites & du calcul des probabilités ; nous nous servirons ici d'un problème que j'ai indiqué vers la fin d'une Dissertation insérée dans les actes de l'institut de *Bo[u]logne, tome* 4, & où je me suis contenté de donner le résultat de sa solution. Voici le problème : *étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions : la première, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des sinus verses d'une latitude double : la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives : la troisième que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions soient remplies*. La première condition est requise par la loi de l'équilibre, qui demande une figure elliptique : la seconde, par un même degré de probabilité, pour les déviations du pendule & les erreurs des Observateurs dans l'augmentation & la diminution des degrés : la troisième est nécessaire pour se rapprocher autant qu'il se pourra des observations ; vu surtout qu'il est très probable que les déviations sont fort petites, comme nous l'avons vu plus haut ; & que l'exactitude scrupuleuse des Observateurs ne permet pas de soupçonner des erreurs tant soit peu considérables dans leurs observations. »

« 386. Ce problème a rapport à la méthode *de maximis & minimis* ; mais on ne peut le résoudre par la méthode ordinaire de l'analyse. // p. 502 // Car l'expression algébrique ne distingue point les quantités positives des négatives, mais elle les désigne par une même valeur générale. On aura aisément la valeur des corrections qu'il faut faire pour remplir la première condition, en nommant deux quantités quelconques, l'une x, l'autre y, au moyen desquelles, & de la valeur des degrés & des sinus verses, on trouvera un autre degré quelconque corrigé, dont la différence au degré donné, donnera en x & y, & autres valeurs connues, la valeur analytique de la correction, & l'équation sera toujours du premier degré. Pour remplir la seconde condition, il faut égaler la somme de toutes de toutes les valeurs à zéro : c'est la seule position qui puisse rendre la somme des positives égale à celle des négatives. On tirera de cette équation en x la valeur de y ; & la substitution donnera en x la somme de toutes les corrections. Mais cette somme même, exprimée par l'analyse, sera un mélange de quantités positives et négatives, & ne sera point variable ; ce qui serait nécessaire pour pouvoir être portée à un maximum ; mais elle sera toujours = 0. Ainsi supposant $dx = 0$, on n'aura rien : toute la formule s'évanouira avec l'espérance du calculateur. Mais au moyen de la Géométrie, secondée par la mécanique, on en vient aisément à bout, comme on va le voir. »

« 387. Soit (fig. 7. pl. I.) AF le diamètre d'un cercle, & AE, AD, AC, AB les sinus verses des latitudes doubles, relatives aux degrés observés : menez, des points E, D, C, B, comme si chaque degré avait été observé sous l'équateur, comme aussi du point A, qui est en effet le lieu du degré sous l'équateur, les droites indéfinies EE', DD', &c. perpendiculaires à AF, & dont les segments E*e*, D*d*, C*c*, B*b*, A*a*, pris du même côté, représentent les degrés, afin qu'on puisse remarquer leurs extrémités *e*, *d*, *c*, *b*, *a*. »

« 388 On voit d'abord que si l'on tire une droite quelconque, comme A'H, qui rencontre ces droites en M, L, K, I, A', elle déterminera des degrés où la première condition sera remplie. Car ayant mené A'F' parallèle à AF, & qui rencontre ces droites en E', D', C', B' les différences par excès des degrés sur celui de l'équateur, savoir E'M, D'L, C'K, B'I, zéro, seront proportionnelles aux droites A'E', A'D', A'C', A'B', zéro, c'est-à-dire aux sinus verses AE, AD, AC, AB, zéro. Mais le problème est encore indéterminé par deux endroits, puisque cette droite peut être tirée à une distance quelconque, & qu'on peut lui donner telle inclinaison qu'on voudra. Deux degrés pourront déjà en quelque sorte la déterminer ; après quoi elle déterminera elle-même, par son intersection avec une des droites parallèles, qui a rapport à une latitude quelconque donnée, le degré qui lui répond, suivant la méthode proposée ci-dessus (n°. 292 de ce Livre V) ; & cette détermination donnera en x & y les valeurs indiquées n°. 386. »

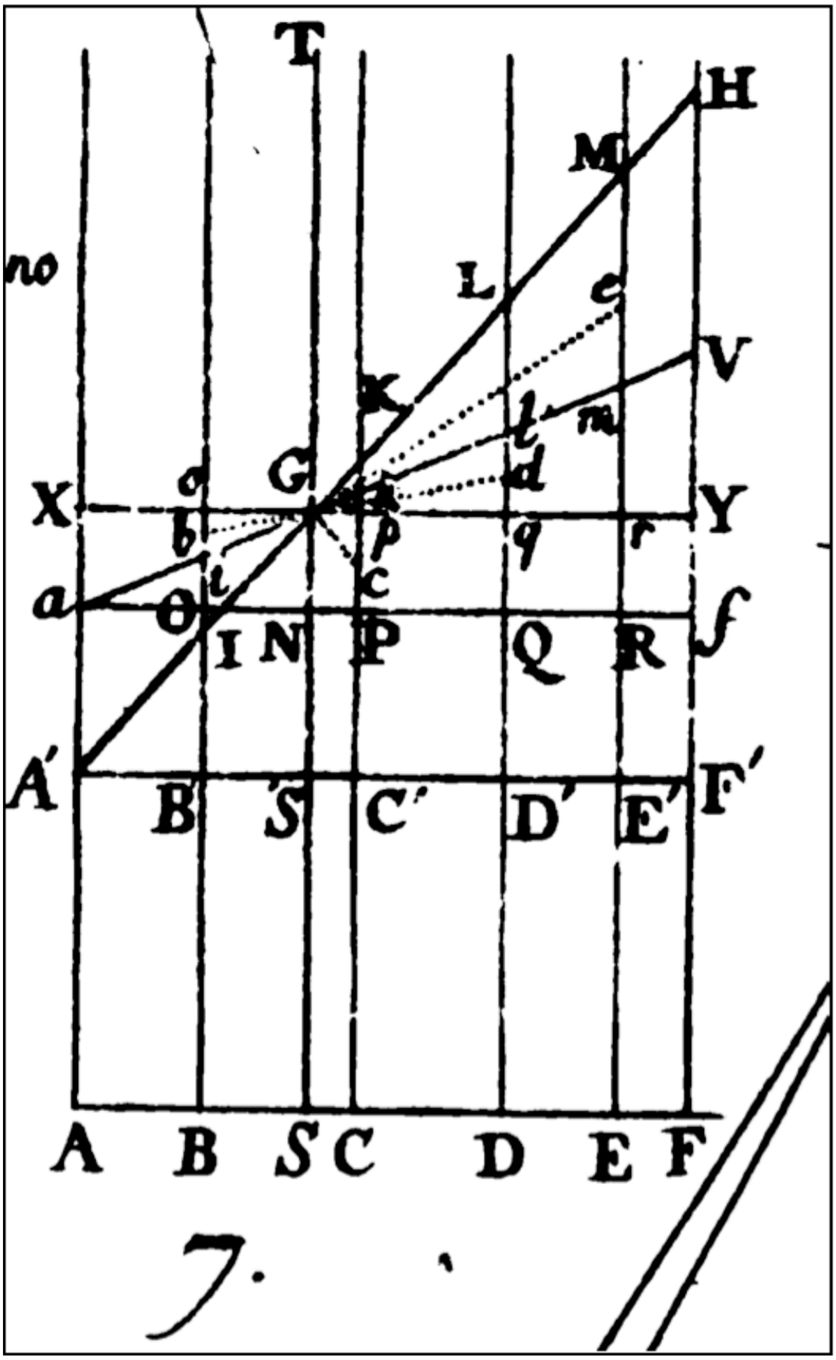


figure 7, planche I.

« 389. La seconde condition déterminera un point de cette droite. Les corrections seront *e*M, *d*L, *c*K, *b*I, *a*A', positives ou négatives, // p. 503 // selon que les points *e*, *d*, *c*, *b*, *a* seront en-deçà ou [au]-delà de A'H par rapport à AF. Il faudra donc, eu égard à la seconde condition, que la somme des corrections qui sont en-deçà, soit égale à la somme de celles qui sont au-delà ; & c'est ce qu'on aura, si la droite passe par le centre commun G de gravité des points *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, puisque par une propriété fort connue du centre de gravité, la somme des distances de tous les points placés d'un côté, selon une direction quelconque, est égale à la somme de toutes celles qui sont au côté opposé. Or ces points étant donnés, on a aussi leur centre commun de gravité G. On a donc un point de la droite cherchée, déterminé par la seconde condition. Cette détermination équivaut à cette valeur de *y*, qu'on doit trouver suivant le n°. 386, par l'équation qui suppose la somme de toutes les corrections = 0. »

« 390. Le problème reste encore indéterminé, puisqu'on peut mener par ce point une infinité de droites qui satisferont toutes aux deux conditions précédentes. La ligne ne détermine donc encore qu'un degré ; c'est celui qui sera représenté par GS perpendiculaire à AF, & qui répondra à une latitude dont le sinus verse sera exprimé par AS. Tout autre degré pris à volonté déterminerait cette droite, & par-là même les autres degrés. Mais elle doit être déterminée par la troisième condition, en sorte que la somme de toutes les corrections (car de part & d'autre elles sont toujours égales) soit la moindre possible. Pour cela imaginons une droite A'GH, qui parte de la position SGT, en tournant à droite ou à gauche autour du point G. D'abord, & tant que l'angle qu'elle formera avec elle sera fort petit, toutes les corrections *a*A, *b*I, *c*K, *d*L, *e*M seront énormes ; ensuite elles iront toujours en diminuant, jusqu'à ce que la droite atteigne quelqu'un des points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* : mais dès qu'elle l'aura passé, la correction qui répond à ce point changera directement de position, & commencera à croître, & elle ira toujours en croissant, tandis que celles qui ont rapport aux points non encore atteint par la droite mobile, continueront de décroître. Or la somme de toutes les corrections diminuera jusqu'à ce que la somme des différences relatives aux corrections croissantes, soit plus grande que celle des différences des décroissantes ; & elle sera la moindre possible dès que celle-là cessera d'être moindre que celle-ci. Mais aussitôt que la somme de toutes les corrections sera la moindre possible, la somme des seules corrections positives sera aussi la moindre possible, de même que la somme des seules négatives, puisque ces somme doivent être chacune la moitié de la somme totale, à cause qu'elles sont toujours égales entre elles. »

« 391 Or les différences ou changements de chaque correction, répondant aux divers changements de position de la droite mobile, seront proportionnels aux distances AS, BS, CS, DS, ES, soit qu'ils soient des accroissements ou des diminutions. Car ces différences ou changements // p. 504 // seront des bases de triangles semblables, & dont le sommet sera en G, & ces bases seront comprises entre deux positions des droites GA', GI, GK, GL, GM ; par conséquent elles seront en raison de ces droites ; c'est-à-dire, par la propriété des parallèles, en raison de AS, BS, CS, DS, ES. C'est pourquoi si l'on observe en quel ordre la droite mobile doit atteindre les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, & qu'on ajoute ensemble dans le même ordre celles des droites AS, BS, CS, DS, ES qui répondent à ces points ; tandis que cette somme sera moindre que la moitié de la somme de toutes ces droites prises ensemble, ou moindre que la somme de celles qui sont de part et d'autre du point S (car les deux sommes prises l'une à droite, l'autre à gauche de ce point, sont égales entre elles) ; la somme des différences relatives aux corrections croissantes, sera encore moindre que celle des décroissantes ; la somme de toutes les corrections ira encore en diminuant, & cette somme sera la moindre possible, quand la somme de celles des droites AS, BS, CS, DS, ES qui ont un rapport aux points déjà rencontrés par la droite mobile, cessera d'être moindre que la moitié de la somme de toutes ces droites, ou que la somme de celles qui sont de part ou d'autre du point S. »

« 392. Or on trouvera aisément le centre de gravité G, & l'ordre dans lequel la ligne mobile rencontre chaque point, & cela par un calcul numérique qui n'est rien moins que pénible. Ce calcul consiste à ajouter ensemble les sinus verses AE, AD, AC, AB, zéro, & de diviser le total par le nombre des points pour avoir AS, puisque la distance au centre de gravité à un plan quelconque A*a*, est égal[e] à la somme de la distance des tous les points, divisée par leur nombre. De même si l'on divise la somme de tous les degrés E*e*, D*d*, &c. par leur nombre, on aura SG. Il suffira même de prendre les différences par excès des degrés sur le premier, d'en faire une somme qu'on divisera de même par leur nombre, & d'ajouter le quotient au premier degré. Car si *af* est parallèle à AF, & qu'elle coupe les droites EE', DD', CC', SG, BB', AA' en R, Q, P, N, O ; NG sera la somme des excès R*e*, Q*d*, &c. divisée par le nombre des points. »

« 393. Maintenant pour trouver l'ordre dans lequel les points sont rencontrés par la droite mobile, on mènera par le point G une droite parallèle à AF, qui rencontrera les droites FF', EE', DD', CC', BB', AA' en Y, *r*, *q*, *p*, *o*, X ; & l'on verra d'abord dans lequel des angles SGY, YGT, TGX, XGS se trouve chaque point. Car un point quelconque doit être à gauche ou à droite de SGT, suivant que son sinus verse est moindre ou plus grand que AS ; & au dessous ou au dessus de XGY, selon que son degré sera plus petit ou plus grand que SG. On n'aura pas de peine non plus à trouver la tangente de l'angle formé par GS ou GT avec la droite mobile passant par un point quelconque. Qu'elle passe par exemple par le point *e*, on aura cette analogie : // p. 505 // *re* est à G*r*, comme le rayon est à la tangente de l'angle *re*G, ou *e*GT, laquelle sera par conséquent en raison de $\frac{Gr}{re}$: il en est ainsi des autres. Les tangentes des petits angles sont les plus petites ; & les points qui répondent à de petits angles sont plutôt rencontrés par la droite mobile dans les angles SGX, YGT ; tout au contraire de ce qui arrive dans les angles TGX, YGS. Donc puisque G*r* est la différence du sinus verse du point *e* au sinus verse AS, & que *re* est la différence du degré E*e* au degré SG ; on aura la règle suivante : *divisez pour chaque point la différence de son sinus verse au sinus verse AS par la différence du degré qui y répond, au degré SG ; & que les quotients des points qui se trouvent dans deux angles opposés au sommet, considérés ensemble, soient rangés par ordre ; en commençant par les plus petits ; qu'ensuite on range aussi les quotients des autres points, placés dans les autres angles, en commençant par les plus grands. C'est dans cet ordre que la droite mobile atteindra tous ces points, si elle commence à se mouvoir dans les deux premiers angles ; & ce serait le contraire si elle commençait à se mouvoir dans les deux derniers*. Mais sans qu'il soit besoin de recourir au calcul, la construction seule, pourvu qu'elle soit exacte, suffira d'ordinaire pour connaître avec beaucoup plus de facilité l'ordre dans lesquel les points sont rencontrés par la droite mobile. »

« 394. Par ce moyen on a tout ce qui est requis pour les corrections cherchées, & pour avoir, même sans leur secours, l'ellipticité. [C]ar le degré sous lequel repose la droite mobile reste sans correction, comme on voit ; par conséquent au moyen de ce degré & du degré SG, on aura par le n°. 348 (& par le n°. 301 de ce Livre V), tous les autres degrés, & par la même leur différence aux degrés observés, c'est-à-dire la correction, & la différence totale qui donnera l'ellipticité qu'on cherche. »

« 395. Or on voit que la méthode est générale pour la correction de tous les termes qui doivent suivre une raison donnée ; car lui substituant cette raison à celle des sinus verses, tout revient au même. Mais il faut appliquer ici la méthode aux degrés. Nous nous servirons de la première table, n°. 355 (& n. 301 de ce Livre), & pour faciliter davantage le calcul, nous prendrons la moitié des sinus verses pour les sinus verses entiers. Les valeurs AB, AC, AD, AE sont ici les mêmes que dans la troisième colonne de cette table & en divisant leur somme par 5, on a AS ou *a*N = 4356,6. O*b*, P*c*, Q*d*, R*e* sont les mêmes valeurs que celles de la cinquième colonne, dont la somme divisée par 5 donne NG = 301,6, d'où on tire le degré SG = 56 751 + 301,6 = 57 052,6, pour une latitude telle, que la moitié du sinus verse d'une latitude double soit 4 356,6 pour le rayon 10 000, c'est-à-dire pour la latitude de 41°15' : mais nous ne ferons ici aucun usage de ce calcul. Les distances *a*N, ON, PN, QN, RN des points // p. 506 // *a*, *b*, *c*, *d*, *e* à la droite SGT seront les différences du premier nombre 4 356,6 = *a*N, aux nombres de la troisième colonne ; & par conséquent 4 356,6, 1 369,6, − 291,4, − 1 405,4, − 4 029,4, la somme tant des positives que des négatives, étant 5 726,2 : & les distances *a*X, *bo*, *cp*, *dq*, *er* à la droite XY seront les différences du second 301,6 = NG aux nombres de la cinquième colonne ; & par conséquent 301,6, 15,6, 73,6, − 21,4, − 369,4. Les distances qui ont des signes semblables, se rapportent aux angles SGX, TGY ; & celles qui ont des signes différents appartiennent aux autres angles TGX, SGY. Ainsi les premières sont celles des points *a*, *b*, *d*, *e* ; le point *c* est le seul de la seconde espèce. Or si l'on divise les termes de la première suite par ceux de la seconde, on aura, pour les tangentes des angles avec la droite SGT, 14, 88, 4, 66, 11. Ainsi les quatre points qui se trouvent dans les premiers angles, savoir *a*, *b*, *d*, *e*, suivent en commençant par les moindres angles l'ordre des nombres 11, 14, 66, 88, c'est-à-dire *e*, *a*, *d*, *b* ; auxquels ajoutant le point *c*, la droite rencontrera les points dans cet ordre *e*, *a*, *d*, *b*, *c*. La première distance du premier point *e*, savoir 4 029,4 est moindre que la somme 5 726,2 des deux positives, ou des trois négatives ; mais si on lui ajoute la distance du point suivant, *a* = 4 356,6, on aura 8 386 qui surpasse déjà cette somme. Ainsi on aura le *minimum* qu'on cherche, lorsque la droite atteindra le point *a*, & la position de cette droite *a*GV corrigera tous les degrés, à l'exception du seul degré A*a* de l'équateur, qui restera sans correction. »

« 396. Si la droite se meut dans le sens contraire, elle rencontrera les points dans un ordre contraire *c*, *b*, *d*, *a*, *e*, & l'on voit que pour avoir une formule qui surpasse 5 726,2, il faut ajouter ensemble les premières distances des quatre premiers points, à savoir 291,4, 1 369,6, 1 405,4, 4 356,6 ; en sorte que ce mouvement contraire donnera encore le *minimum* à la rencontre du même point *a*. »

« 397. Ayant trouvé la position requise pour le *minimum* cherché, on aura l'ellipticité. Car la position de la droite sera ici *a*GV, le degré de l'équateur restant le même, ce qui se rencontre heureusement pour trouver tout d'un coup la différence totale & l'ellipticité. Car on aura cette analogie : *a*N = 4 356,6 est à NG = 301,6, comme *af* = 10 000 à la différence totale *f* V = 692 : on divisera le degré 56 751 par le tiers de cette différence, & on ajoutera 2 au quotient, suivant le n° 350 (on en donnera plus bas la démonstration), pour avoir l'ellipticité $\frac{1}{248}$. Le calcul donne pour les cinq degrés *a*, *b*, *c*, *d*, *e* les corrections suivantes : 0, − 79,2, + 93,8, + 75,9, − 90,5. »

[…]

*

*   *

CONDORCET, Marie, Jean, Antoine, Nicolas de Caritat (marquis de —, Ribemont, 1743 – Bourg-la-Reine, 1794) :

Extrait des *Élémens du Calcul des Probabilités, et son Application aux Jeux de Hasard, à la Loterie, et aux Jugements des Hommes ; par Feu M. de Condorcet.*
Paris, Chez Royez, An XIII – 1805, pp. 65-68.
Texte établi et réorthographié par J.-P. Le Goff.

/ / p. 65 / / […]

Je passe maintenant à un cas plus compliqué, et je suppose qu'il y ait dans une urne un nombre déterminé de boules blanches ou noires, quatre, par exemple ; que je tire une de ces boules, que je rejette ensuite ; puis que j'en tire une seconde, que je rejette de nouveau, et ainsi de suite, en marquant à chaque fois la couleur de la boule que j'ai tirée.

Cela posé, imaginons que j'aie tiré trois boules blanches et une noire. On peut me demander la probabilité qu'il y ait dans l'urne ou quatre boules blanches, ou trois blanches et une noire, ou deux blanches et deux / / p. 66 / / noires, ou trois noires et une blanche, ou quatre noires.

Je fais alors le raisonnement suivant : S'il y avait eu quatre boules blanches, la probabilité d'avoir trois blanches et une noire serait 0 ; si trois blanches et une noire, elle serait $\frac{4.3^3.1}{4^4}=\frac{108}{256}$; si deux blanches et deux noires, $\frac{4.2^3.2}{4^4}=\frac{64}{256}$; si une blanche et trois noires $\frac{4.1^3.3}{4^4}=\frac{12}{256}$; et 0, s'il y'en avait eu quatre noires. On trouve, en ajoutant les numérateurs de ces fractions, 184 combinaisons également possibles qui donnent l'évènement arrivé dans les différentes hypothèses, toutes également probables par la nature de la question. Donc, $\frac{1}{5}.\frac{184}{256}$ exprimera le rapport que le nombre des combinaisons qui répondent au cas où l'on doit tirer trois boules blanches et une noire, a au nombre total. Et 0, $\frac{1}{5}.\frac{108}{256}$, $\frac{1}{5}.\frac{64}{256}$, $\frac{1}{5}.\frac{12}{256}$, 0 représenteront le même rapport pour les combinaisons qui appartiennent à chaque hypothèse sur le nombre des boules. Donc, puisque l'on a tiré trois boules blanches et une noire, les combinaisons qui répondent à cet évènement sont les seules possibles, et 184 représentant le nombre / / p. 67 / / total de ces combinaisons possibles, il y en aura 108 qui répondront à l'hypothèse de trois boules blanches et une noire ; 64 à celle de deux noires et deux blanches ; 12 à celle de trois noires et une blanche, et aucune aux deux autres hypothèses. La probabilité de la première hypothèse sera donc $\frac{108}{184}$; celle de la seconde $\frac{64}{184}$; celle de la troisième $\frac{12}{184}$. Elle doit être en effet comme le nombre des combinaisons qui appartiennent à cette hypothèse, et qui donnent le tirage arrivé, est au nombre total des combinaisons qui donnent ce tirage. Ces nombres sont réellement ceux des combinaisons qui appartiennent aux trois hypothèses relatives, l'une au rapport entre les boules qui sont dans l'urne, l'autre au rapport entre les boules tirées de l'urne, et ils expriment par conséquent la probabilité de l'un ou de l'autre de ces faits, suivant qu'on les suppose donnés ou incertains.

Si maintenant je demande la probabilité d'amener une boule blanche, en tirant une fois de plus, je dirai, dans la première hypothèse, cette probabilité serait $\frac{3}{4}$: Dans la seconde elle serait $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{4}$ dans la troisième. Mais la probabilité de la première est $\frac{108}{184}$, celle de la seconde $\frac{64}{184}$, celle de la troisième $\frac{12}{184}$. La probabilité d'avoir une boule blanche sera donc : $\frac{108}{184}.\frac{3}{4}+\frac{64}{184}.\frac{1}{2}+\frac{12}{184}.\frac{1}{4}$ ou $\frac{116}{184}$; celle d'avoir une boule noire se trouverait de même égale à $\frac{108}{184}.\frac{1}{4}+\frac{64}{184}.\frac{1}{2}+\frac{12}{184}.\frac{3}{4}$ ou $\frac{68}{184}$, comme cela doit être, puisqu'on ne peut ti- // p. 68 // rer qu'une boule blanche ou une boule noire, et qu'ainsi la somme de ces deux probabilités doit être égale à l'unité.

On voit comment, par le moyen des méthodes ci-dessus, on pourrait déterminer de même la probabilité de tirer dans la même hypothèse, sur un nombre donné de boules, tel nombre de blanches et de noires. Il n'y a ici aucune supposition, excepté celle de regarder comme constant le rapport des boules blanches et noires qui sont déposées dans l'urne.

On peut imaginer à présent que, conservant cette même supposition , on ignore de plus le nombre des boules contenues dans l'urne, de manière que le rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules, puisse être également exprimé par tous les nombres, depuis zéro jusqu'à l'unité.

Cette supposition qui consiste à regarder comme *également possibles* les différents rapports entre ces deux nombres, est ici légitime, puisque, d'après la nature de la question, je suis dans une ignorance absolue sur ce rapport ; et la seule donnée que j'aie pour évaluer la probabilité qu'il soit plutôt exprimé par un nombre que par un autre, dépend de l'observation des tirages successifs.

[…]

*
*   *

LACROIX, Sylvestre-François (Paris, 1765 – *id.*, 1843) :

"Détermination de la probabilité *a posteriori*", extrait du *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités*, Paris, Chez Mme Vve Courcier, 1816, *Section seconde*, §§ 80-81, pp. 132-136.

Texte établi et réorthographié par J.-P. Le Goff.

/ / p. 132 / /

SECTION SECONDE.

Détermination de la probabilité a posteriori, *c'est-à-dire lorsque le nombre total des chances est illimité et que ses rapports avec le nombre des chances de chaque espèce, sont inassignables*.

80. QUAND on ne connaît point la forme du dé, ou la condition de l'urne qui produit les événements observés, il faut, pour remonter à leur probabilité, considérer toutes les formes ou les conditions dont ils peuvent resulter, afin d'en déduire une sorte de probabilité moyenne qui approchera d'autant plus d'être la véritable, que le nombre des observations sera plus grand (40).

Si, par exemple, on a tiré successivement d'une urne 3 boules blanches et 1 noire, en ayant soin de remettre chaque fois la boule sortie, qu'on sache que le nombre total des boules est 4, tant blanches que noires, mais qu'on ignore combien il y en a de chaque sorte, on pourra faire, sur la condition de cette urne, les 3 hypothèses ci-dessous :

3 boules blanches, 1 noire, d'où $e = \frac{3}{4}, f = \frac{1}{4}$,

2 .... 2 .... $e = \frac{2}{4}, f = \frac{2}{4}$,

1 .... 3 .... $e = \frac{1}{4}, f = \frac{3}{4}$, / / p. 133 / /

e désignant la probabilité de l'arrivée d'une boule blanche, *f* celle de l'arrivée d'une boule noire. La probabilité de l'événement composé de la sortie de 3 boules blanches et de 1 boule noire, étant exprimée par $4e^3f$ (22), deviendra successivement

$$\frac{27}{64}, \qquad \frac{16}{64}, \qquad \frac{3}{64}.$$

La dernière hypothèse, qui donne la plus petite probabilité pour cet événement composé, est aussi en elle-même beaucoup moins probable que les deux autres hypothèses ; car si l'urne ne contenait qu'une seule boule blanche, il faudrait que cette même boule fût sortie trois fois de suite ; on conçoit qu'il y aurait moins de difficulté s'il y avait. 2 boules blanches, et encore moins s'il y en avait 3. La facilité avec laquelle chaque hypothèse amènerait les événements observés, donne naturellement la probabilité de cette hypothèse ; car plus elle offre de combinaisons favorables à la production de ces événements, plus on a occasion d'en répéter le jugement *de possibilité* (5 et 6). C'est ainsi qu'on a posé pour principe que *les probabilités des causes* (*ou des hypothèses*) *sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés* (*).

(*) Cet énoncé se trouve dans le tome VI des *Savans étrangers*, p. 623. Bayes, dans les *Transactions philosophiques* de 1763 (p. 370), et Price, dans celles de 1764 (p. 296), s'étaient déjà occupés de ce sujet ; mais M. Laplace l'a réduit le premier à la forme analytique sous laquelle on le traite maintenant, qui en facilite et en generalise beaucoup les applications.

Dans l'exemple actuel, les probabilités des trois hypothèses établies sont proportionnelles aux nombres 27, 16, 3 ; leur somme doit être d'ailleurs égale à // p. 134 // l'unité, puisqe l'une de ces hypothèses a nécessairement lieu (8) : il suit donc de là que chacune des probabilités dont il s'agit est égale au nombre qui lui correspond, divisé par la somme des trois nombres, ce qui donne les fractions

$$\frac{27}{46}, \qquad \frac{16}{46}, \qquad \frac{3}{46}.$$

On peut dire aussi que sur les combinaisons fournies par l'ensemble des hypothèses, les $27 + 16 + 3 = 46$ qui s'accordent avec les événements arrivés, sont les seules possibles, et que la probabilité de chaque hypothèse se détermine comme celle d'un événement, en divisant le nombre de cas où elle peut avoir lieu, par celui de tous les cas possibles, ce qui donne les mêmes fractions que ci-dessus. Enfin il faut remarquer encore que ces fractions, ou *les probabilités des diverses hypothèses, se forment en divisant la probabilité de l'événement composé, calculée dans chaque hypothèse, par la somme de ses probabilités dans toutes les hypothèses* (*).

(*) En traitant l'exemple ci-dessus, Condorcet, de qui je l'ai emprunté (*Elémens du Calcul des Probabilités*, p. 65), fait cinq hypothèses, c'est-à-dire toutes celles qui peuvent se présenter quand on n'a pas égard aux événements observés. En effet, on peut alors supposer que les 4 boules. sont blanches, ou qu'elles sont noires ; mais comme ni l'une, ni l'autre de ces dernières hypothèses ne saurait amener les événements observés, elles donnent 0 pour leur probabilité, ce qui ne change rien au résultat obtenu ci-dessus.

Il est facile de voir que cette règle est générale ; car si on désigne par h, h', h'', h''' les probabilités des diverses hypothèses susceptibles d'amener l'événement composé qui a eu lieu, et par a, a', a'', a''' les pro- // p. 135 // babilités que chaque hypothèse donne pour ces événements, on aura

$$h + h' + h'' + h''' = 1,$$

$$h : h' : h'' : h''' :: a : a' : a'' : a''' ;$$

d'où il résulte

$$h = \frac{a}{T}, \qquad h' = \frac{a'}{T'}, \qquad h'' = \frac{a''}{T''}, \qquad h''' = \frac{a'''}{T'''},$$

T représentant $a + a' + a'' + a'''$.

81. Quand on a déterminé la probabilité de chaque hypothèse possible, on en déduit facilement la probabilité des événements qui peuvent arriver aux tirages suivants ; dans notre exemple, celles d'amener au 5[e] tirage une boule blanche ou une boule noire. Il n'est pas difficile de voir que ce problème revient à celui du n° 19, et se résout par les probabilités composées. Les trois hypothèses établies peuvent être considérées comme trois urnes différentes, de l'une desquelles doit nécessairement sortir l'événement attendu. La probabilité de cet événement se composera donc de celle qu'il a dans chaque hypothèse, multipliée par celle de l'hypothèse : ainsi on aura pour la sortie d'une boule blanche, au 5[e] tirage,

$$\frac{27}{46}\times\frac{3}{4}+\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{46}\times\frac{1}{4}=\frac{116}{184},$$

et pour celle de la sortie d'une boule noire,

$$\frac{27}{46}\times\frac{1}{4}+\frac{16}{46}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{46}\times\frac{3}{4}=\frac{68}{184}.$$

On trouverait de même, pour tout autre exemple, que *la probabilité d'un nouvel événement simple s'ob-* // p. 136 // *tient en calculant, d'après les événements passés, la probabilité des diverses hypothèses possibles, et faisant la somme des produits de ces probabilités par celles de l'événement, prises dans chaque hypothèse.*

[…]

*

*   *

Frise historique sur la probabilité et la statistique

Bref aperçu du développement des théories probabiliste et statistique

Jean-François PICHARD,

Extrait de : HENRY, Michel (coord.), *Autour de la Modélisation en Probabilités*,
coll. “*Didactiques*”, Besançon, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2001.

Dans cette présentation, j’ai essayé de faire un découpage selon les grands thèmes qui ont traversé les époques. Ce choix est arbitraire, bien sûr, et l’on retrouvera des grands savants (avec sûrement des omissions) sur plusieurs de ces thèmes, mais un ordre chronologique aurait émietté à la fois ces grands thèmes et les apports de ces savants.

0 - La préhistoire

Les jeux, l’incertain,	3e millén. av J.C.	Astragales, dés en terre cuite.	Mésopotamie
L’imprévisible	2e millén av J.C.	Dés cubiques équilibrés.	Egypte
Aristote	IVe siècle av J.C.	Logique distinguant le fortuit.	Grèce
Juriste Ulpien	IIIe siècle ap J.C.	Tables d’estimation des rentes viagères.	Rome
Risques maritimes	XIIIe siècle	Bourses d’assurance.	Italie
Rentes viagères	XIIIe siècle	Estimation empirique.	Pays-Bas
Calcul des probabilités	1361 (dictionnaire Hachette)	Science dont le but est de déterminer la vraisemblance d’un événement.	Probabilité comme degré de crédibilité d’une opinion.

1 - Les premiers écrits : Cardan et Galilée

Jérôme Cardan	1501-1576 Italie	Traité *De Ludo Aleae*, entre 1525 et 1560, publié en 1665	Notions : jeu équitable équipossibilité des faces pour un dé honnête, la mise est proportionnelle aux chances, combinaisons pour 2 et 3 dés.
Galileo Galilei	1564-1642 Italie	Mémoire vers 1620, publié en 1718	Problème du Grand Duc de Toscane.

2 - Le début “officiel” : Pascal et Fermat[6]

Pierre de Fermat	1601-1665 France	Correspondance de 1654, publiée en 1679.	Problème des partis combinaisons.
Blaise Pascal	1623-1662 France	*Traité du triangle arithmétique*, 1654, publié en 1665.	Jeu équitable, droit d’espérer, conditionnel, récurrence.

[6] La théorie des probabilités est une mathématisation du hasard (une “*géométrie du hasard*”, comme l’a formulé Pascal).

3 - Le premier traité publié : Huygens[7]

Christiaan Huygens	1629-1695 Hollande	Traité *De ratiociinis in Ludo aleae*, 1657	Notions : jeu juste, valeur du jeu = *expectatio* d'où espérance

4 - Logique des événements et probabilité

Antoine Arnauld et Pierre Nicolle	1612-1694 1625-1695 France	La *Logique* ou l'art de penser, 1662	"Probabilité" est pris au sens de degré de crédibilité et au sens probabiliste actuel de rapport de "chances"

5 - Arithmétique politique

John Graunt	1620-1674 Angleterre	Traité *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality…*, 1662.	Critique des sources, **table de mortalité**, estimation raisonnée de la population et de son évolution.
William Petty	1623- 1687 Angleterre	Traité *Political Arithmétic*, vers 1673, publié en 1690.	Évaluation de la population, de sa croissance, et de sa distribution hommes / femmes ; évaluation de divers biens et marchandises.
Christiaan et Ludwig Huygens, Jan Hudde	Hollande	Correspondance 1669-1671, publiée en 1920	Évaluation des rentes viagères sur des tables de mortalité, espérance de vie (conditionnelle), vie probable, courbe de mortalité (étudiée par Ch. Huygens).
Jan de Witt	1625-1672 Hollande	Rapport sur les rentes viagères 1671.	
Gottfried W. Leibniz	1646-1716 Allemagne	*De incerti aestimatione*, 1678. *Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*, 1680, publié en 1866.	Vie moyenne (conditionnelle), vie probable, population stationnaire, calcul de fécondité.
Edmund Halley	1656-1742 Angleterre	Mémoire "*An Estimate of the degrees of the Mortality of Mankind*", *Phil. Trans.*[8], 1693.	Première table de mortalité digne de ce nom, pour règler la valeur des assurances sur la vie et les rentes viagères.

[7] Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du 18ème siècle.

[8] *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

6 - La probabilité à la fin du 17ème siècle

Gottfried W. Leibniz		*De arte combinatoria*, 1666, divers mémoires, de 1678 à 1686, publiés en 1866 et sqq., correspondance.	Aspects philosophiques, jeu juste, équipossibilité par principe de raison suffisante, probabilité comme degré de possibilité.
Jakob Bernoulli	1654-1705 Suisse	Mémoire de 1685.	Introduction de série dans le calcul d'une probabilité.

7 - Le début du 18ème siècle et les trois grands traités

Jakob Bernoulli		Traité *Ars Conjectandi*, vers 1692, publié en 1713.	L'urne comme modèle, schéma binomial, application aux choses morales et politiques, une "loi des grands nombres".
Pierre Rémond de Montmort	1678-1719 France	Traité *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708 ; 2ème édition 1713.	Le premier traité après celui de Huygens ; traitement algébrique (combinatoire) de jeux complexes, fonction génératrice.
avec Nicolas Bernoulli	1695-1726 Suisse	Correspondance dans la 2ème édition, 1713	L'infini dans les jeux : loi géométrique.
Abraham de Moivre	1667-1754 Angleterre	Mémoire "*De mensura sortis*", *Phil. Trans.*,1711. traité *Doctrine of Chances*, 1718, 3ème édition 1756. *A Traitise of Annuities on Lives*, 1725.	Équation de récurrence aux différences finies, traitement analytique, fonction génératrice, "loi des grands nombres" par approximation normale[9]. Loi de mortalité, valeur des rentes viagères sur plusieurs têtes.
Georges Louis Leclerc de Buffon	1707-1788 France	Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau, 1733, dans *Essai d'arithmétique morale*, 1777.	Probabilité géométrique, intervention du calcul intégral en théorie des probabilités, première expérimentation sur le paradoxe de Saint-Pétersbourg.
Daniel Bernoulli	1700-1782 Suisse	Mémoire "*Specimen theoriae novae de mensura sortis*" à l'Académie Petrov, 1730-31.	Paradoxe de Saint-Pétersbourg : variable aléatoire ayant une espérance mathématique infinie, espérance morale.

9. La distribution de Laplace-Gauss a été qualifiée de "normale" par Pearson en 1893.

8 - Démographie au 18ème siècle

J. Arbuthnot, N. Bernoulli, G.L. Buffon, A.de Moivre, Daniel Bernoulli, …, P.S. Laplace, D. Poisson	18e siècle et début 19e siècle	*An Argument for Divine Providence*, *Phil. Trans.*, 1710.	Rapport du nombre de naissances de garçons à celui des filles, le premier test d'hypothèse statistique.
Leonhard Euler	1707-1783 Suisse	*Recherches générales sur la mortalité…*, 1760.	Relation entre table de mortalité et croissance de la population.
Antoine Deparcieux	1703-1768 France	Traité *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746.	Théorie et première table de mortalité française ; durée de vie probable, moyenne dans une population non stationnaire.
Daniel Bernoulli Jean Le Rond d'Alembert	1717-1783 France	Mémoires vers 1760. *Opuscules mathématiques.*	} Dispute sur l'inoculation
Pierre Wargentin	1718-1783 Suède	Mémoires de 1755 et sqq.	Tables de mortalité avec répartition par sexe, âge et causes de décès

9 - La théorie des erreurs, vers la loi normale et le théorème limite central[10]

Thomas Simpson	1710-1761 Angleterre	*Miscellaneous tracts,…* 1757.	Distribution des erreurs suivant une densité continue triangulaire.
Daniel Bernoulli		*dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium*, 1777.	Densité continue en arc de cercle.
Johann H. Lambert	1728-1777 Allemagne	*Photometria sive de mensura*, 1760.	Première représentation d'une courbe des erreurs "en cloche".
Joseph L. Lagrange	1736-1813 Italie	mémoire sur l'utilité de prendre le milieu…, 1776.	
Pierre Simon Laplace	1749-1827 France	mémoire sur le milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations, 1777 ; etc. *Théorie analytique des probabilités*, 1812.	Diverses densités, en particulier 1ère loi de Laplace et loi normale ; énoncé du TLC[11]. Il fonde les bases de la théorie de l'inférence.
Adrien Marie Legendre	1752-1833 France	*Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, 1805.	Méthode des moindres carrés.
Carl Friedrich Gauss	1777-1855 Allemagne	*Theoria Motus*, 1809 ; *Theoria combinationis observationum erroribus minimis*, 1821.	Méthode des moindres carrés et loi normale *Méthode des moindres carrés*, traduction Bertrand, 1855.

---

10 C'est le problème de la combinaison d'observations discordantes d'une même quantité ou de plusieurs liées par des équations de condition, afin d'en obtenir les meilleures estimations possibles.

11 TLC = Théorème Limite Central, d'après une dénomination de G. Pólya en 1920.

10 - Le problème de la probabilité inverse

Thomas Bayes	ª 1701-1761 Angleterre	*"An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances"*, *Phil. Trans.*, 1763.	Problème de l'inférence statistique à partir de probabilités a posteriori.
Pierre Simon Laplace		*Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, 1774.	

11 - Agrégation des préférences - probabilité des témoignages

Borda	1733-1799 France	Mémoire sur les élections au scrutin, 1781.	
Jean Antoine Condorcet	1743-1794 France	*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785.	
Pierre Simon Laplace		mémoire sur les probabilités, 1781 et *Théorie Analytique des probabilités*, 1812, chap. xi.	Cette application du calcul des probabilités va susciter de vives polémiques dès le début du
Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements…*, 1837.	19e siècle.

12 - Enseignement et philosophie des probabilités

Jean Antoine Condorcet	1743-1794 France	*Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard…*, 1805.	Le premier ouvrage destiné à l'enseignement.
Sylvestre Lacroix	1765-1840 France	*Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816, 1822.	Le premier à enseigner le calcul des probabilités en 1785 sur un plan de Condorcet ; cet ouvrage expose les différents thèmes évoqués ici.
Pierre Simon Laplace		*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814.	Premier traité de vulgarisation ; essai d'axiomatisation.
Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements…*, 1837.	Distinction des probabilités objective et subjective;
Antoine Augustin Cournot	1801-1877 France	*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843.	Fondement de la théorie, distinction des probabilités objective et subjective critique de l'homme moyen de Quetelet.
Joseph Bertrand	France	*Calcul des probabilités*, 1889.	Il signale l'ambiguïté de l'expression "au hasard".
Emile Borel	1871-1956 France	*Le hasard*, 1914/1948 *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, 1938.	Discussion sur l'attribution de probabilité dans des cas concrets.

13 - La statistique économique et sociale

William Playfair	1759-1823 Angleterre	*The commercial and political atlas*, 1786, *Statistical Breviary*, 1801.	Première publication de graphiques statistiques.
André M. Guerry	France	*Essai sur la statistique morale de la France*, 1833.	Cartes statistiques et premier histogramme.
Adolphe Quetelet	1796-1874 Belgique	*Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*, 1835.	Homme moyen, vérification de la distribution normale en sciences de la vie.

14 - Lois limites

Siméon Denis Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements…*, 1837.	Fonction cumulative, loi des grands nombres et variable aléatoire de Poisson.
Irénée Jules Bienaymé	1796-1878 France	Considérations à l'appui de la découverte de Laplace…, 1853.	Égalité de Bienaymé, Théorème Limite Central à plusieurs dimensions.
Pafnouti L. Tchebychev	1821-1894 Russie	Des valeurs moyennes, 1867.	Le père de l'école russe, loi des grands nombres, 1863, inégalité de B.-T., 1867.
Andreï Andreïevitch Markov	1856-1922 Russie	la loi des grands nombres et la méthode des moindres carrés (en russe), 1898.	Démonstration rigoureuse du TLC en 1898 ;
A.M. Liapounov	1857-1918 Russie	proposition générale du calcul des probabilités, 1901.	démonstration du TLC avec conditions suffisantes.
Emile Borel	1871-1956 France	les probabilités dénombrables… 1909.	Loi forte des grands nombres.

15 - La biométrie en Angleterre

Francis Galton	1822-1911 Angleterre	*Regression towards mediocrity in hereditary stature*, 1886. *Co-relations and their measurement*, 1888.	Prolongement de Quetelet, régression linéaire et corrélation.
Karl Pearson	1857-1936 Angleterre	*on the criterion that a given system of deviations from the probable…*, 1900.	Loi normale multi-dimensionnelle, corrélation partielle ; test du Khi-deux, méthode du maximum de vraisemblance.
Ronald Fisher	1890-1962 Angleterre	*The design of Experiments*, 1935.	Statistique en géométrie multidimensionnelle ; analyse de variance ; plan d'expérience.

16 - L'axiomatisation

Emile Borel	1871-1956 France	*Leçons sur la théorie des fonctions*, 1896	Théorie des ensembles et de leur mesure.
Henri Lebesgue	1875-1941 France	*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904	Théorie abstraite de la mesure et intégration.
Maurice Fréchet	1878-1973 France	intégrale définie sur un ensemble abstrait, 1915	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.
Paul Lévy	1886-1971 France	*Calcul des probabilités*, 1925	Loi de "0 ou 1", fonction caractéristique et convergence en loi.
Andreï N. Kolmogorov	1903-1987 Russie	*Grundbegriffe der Wahrs-cheinlichkeitsreichnung*, 1933	Fondement axiomatique de la théorie des probabilités appuyée sur la théorie de la mesure.
Harald Cramér	1893-1985 Suède	*Random variables and probability distributions*, 1937.	Fondements mathématiques de la théorie des probabilités.

17 - Processus et problèmes limites

Andreï Andreïevitch Markov	1856-1922 Russie	*Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1912	Processus en chaîne, 1906.
Alexandre J. Khintchine	1894-1959 Russie	*Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933.	Théorèmes limites en calcul des probabilités.
Paul Lévy	1886-1971 France	*Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 1937. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948.	Lois stables et infiniment divisibles. Problèmes limites. Temps aléatoire, temps local. Conditionnement, martingales.
Andreï N. Kolmogorov et Boris V. Gnedenko	1903-1987 Russie	*Distributions limites de sommes de variables aléatoires indépendantes*, 1949 (en russe).	Problèmes des grandes déviations, 1929. Processus de Markov, lois infiniment divisibles.
William Feller	1906-1970 Yougoslavie, USA	*Introduction to probability théorie*, 1950.	Résolution complète de la loi des erreurs, 1937.
Maurice Frechet	1878-1973 France	*Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Livre I, *Généralités sur les probas. Variables aléatoires.* 1937	Compléments à la théorie de Kolmogorov.
Harald Cramér	1893-1985 Suède	*Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités*, 1938.	Conséquences du T.C.L. et théorème de continuité avec Paul Lévy.
A. Blanc-Lapierre et R. Fortet	France	*Théorie des fonctions aléatoires*, 1953	Théorie générale des processus stochastiques.
Joseph Lee Doob	U.S.A.	*Stochastic processes*, 1953.	

*

*   *