Le jeu de la baguette de Buffon

Premier exemple de “probabilités” continues

Par Didier Bessot & Didier Trotoux

Séminaire de rentrée de l’I.R.E.M de Basse Normandie – Caen

Cahagnes, 30 septembre – 1er octobre 2011

Georges-Louis LECLERC, Comte de BUFFON

Extrait de l'*Histoire naturelle, générale et particulière*.

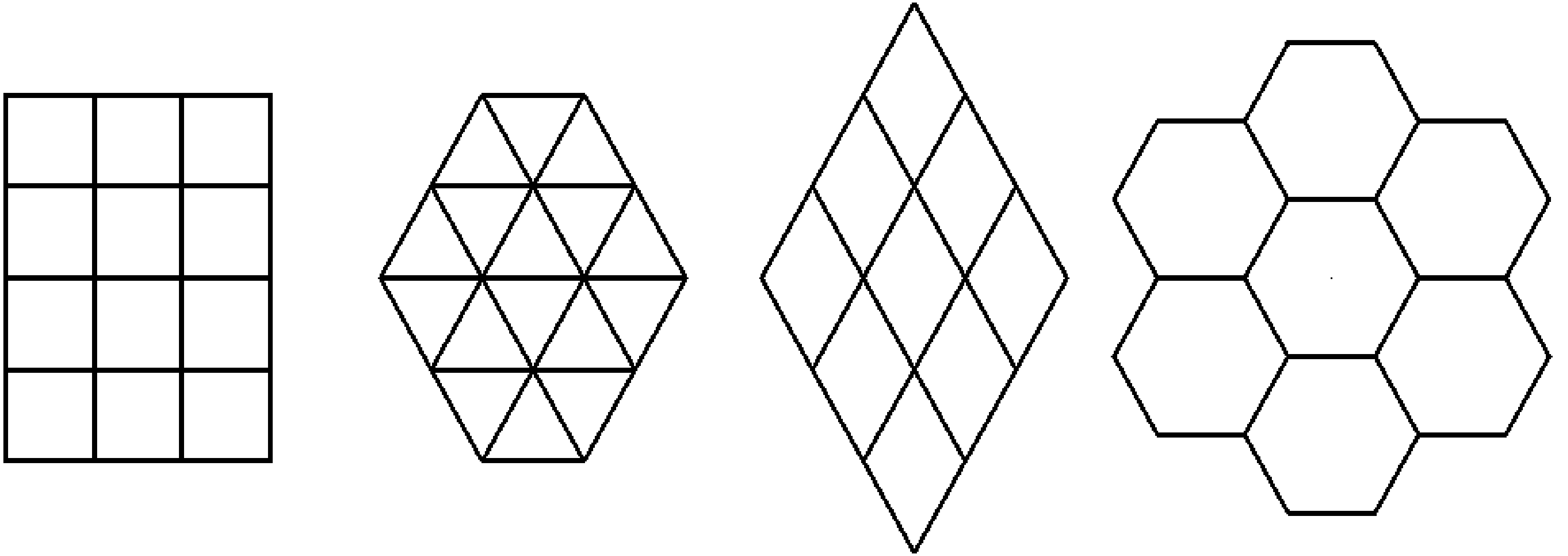
Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme (1777).

Supplément, Tome Quatrième. XXIII, pp. 95-105.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

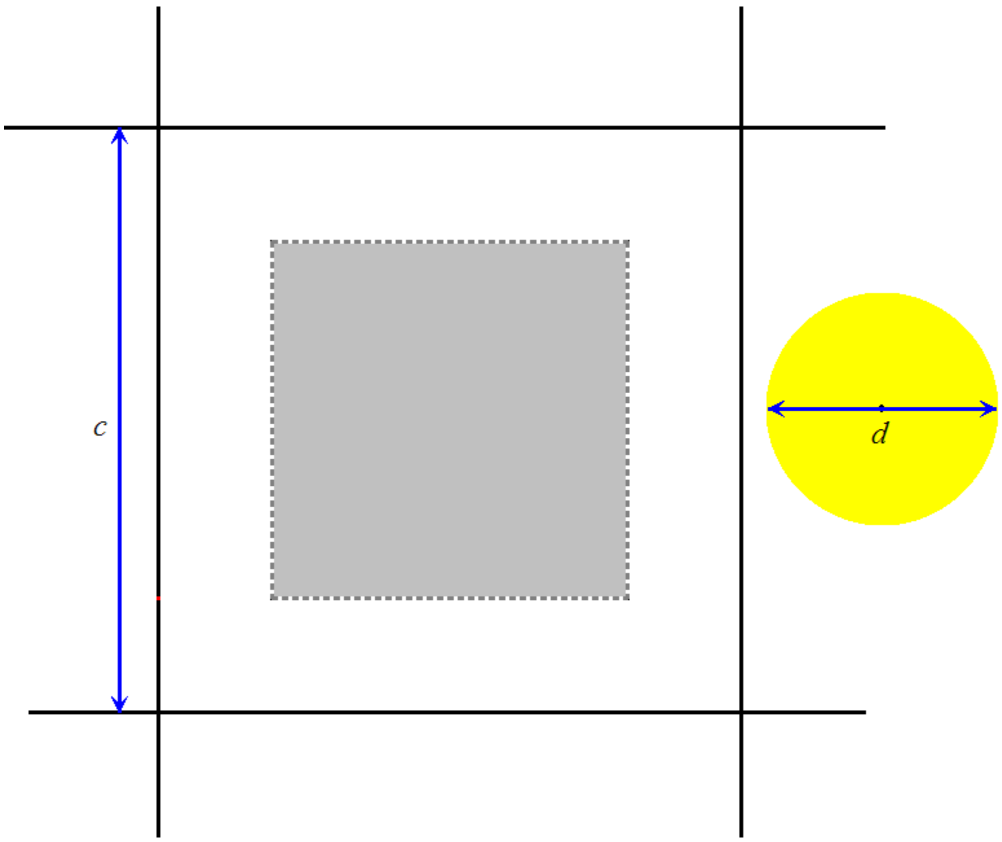
Le jeu de franc-carreau

Les pavages proposés par Buffon



Pavé carré – cas 1

[Pavage Carré cas 1]



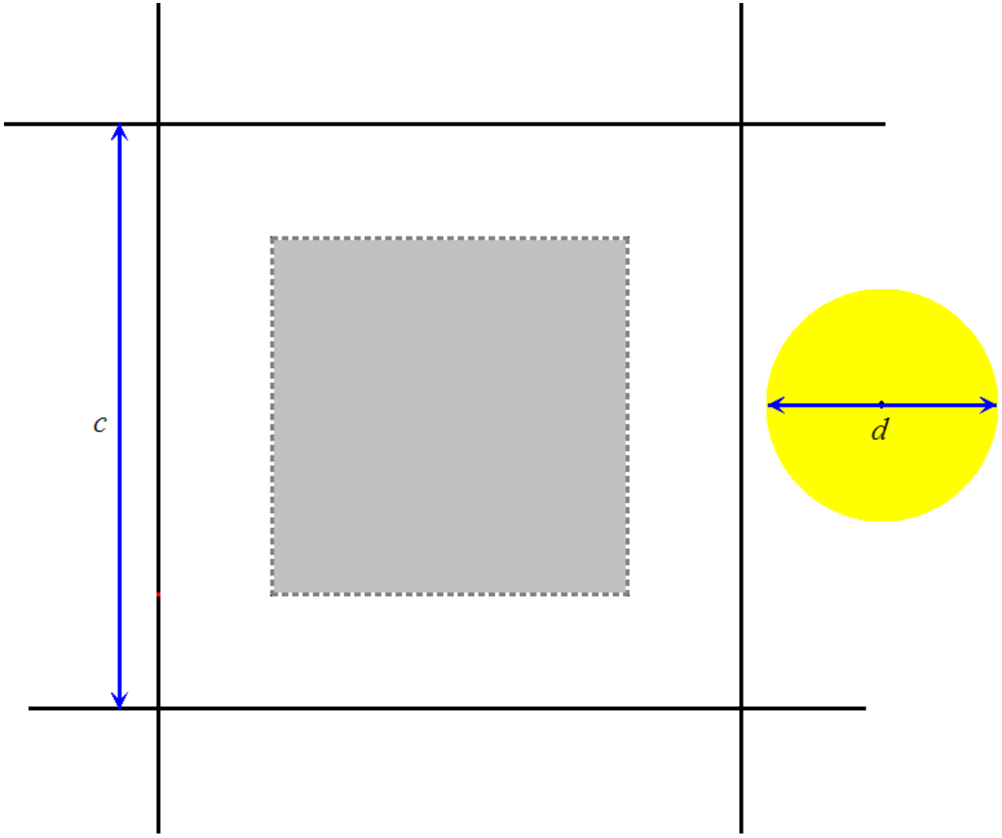
Côté du carreau : c

Diamètre de l’écu : d

(Condition implicite : $c \geq d$)

Pavé carré – cas 1

[Pavage Carré cas 1]



Côté du carreau : c

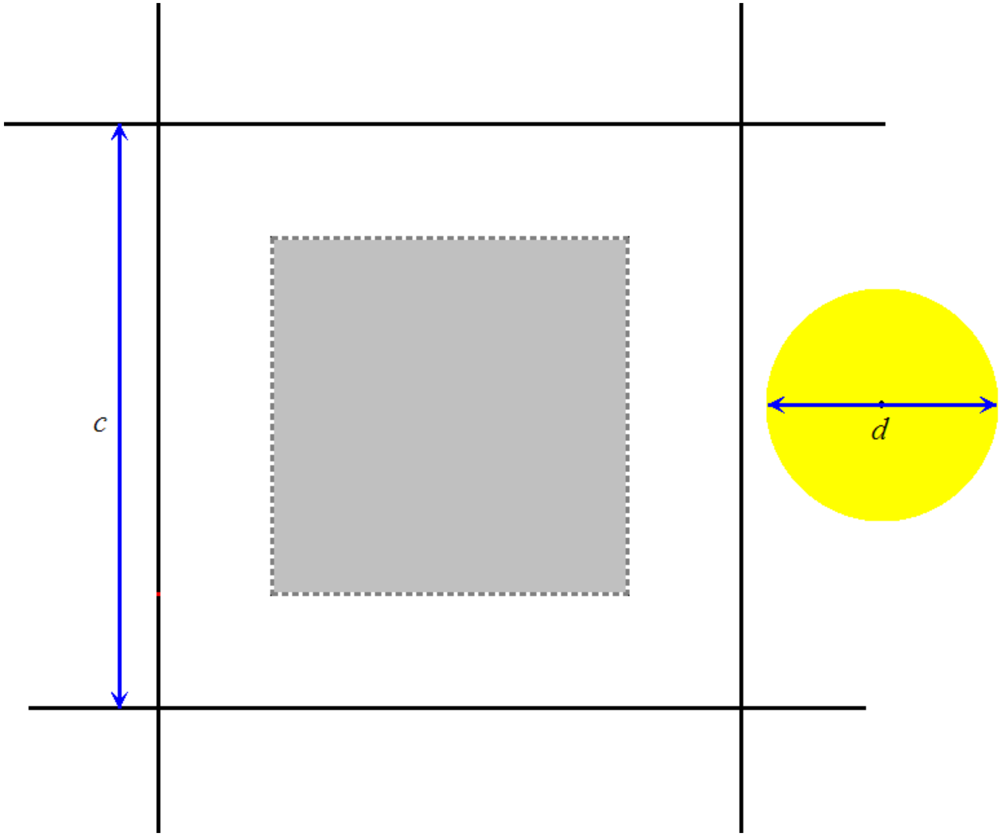
Diamètre de l'écu : d

(Condition implicite : $c \geq d$)

Aire du carreau : c^2

Pavé carré – cas 1

Pavage Carré cas 1



Côté du carreau : c

Diamètre de l'écu : d

(Condition implicite : $c \geq d$)

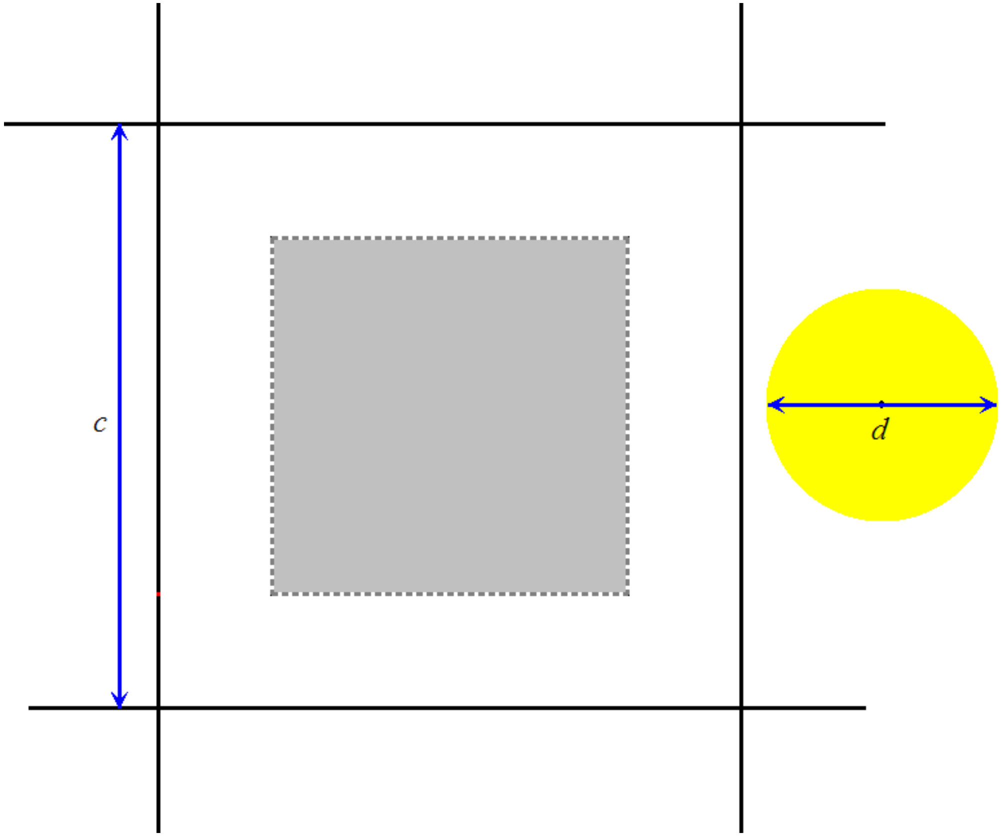
Aire du carreau : c^2

Aire du carré central :

$(c - d)^2$

Pavé carré – cas 1

Pavage Carré cas 1



Côté du carreau : c

Diamètre de l'écu : d

(Condition implicite : $c \geq d$)

Aire du carreau : c^2

Aire du carré central :

$$(c - d)^2$$

Aire de la “couronne” :

$$c^2 - (c - d)^2 = 2cd - d^2$$

Le sort du premier joueur, qui parie sur franc-carreau est “mesuré” par l’aire du carré central,
soit $(c - d)^2$,

Le sort du premier joueur, qui parie sur franc-carreau est “mesuré” par l’aire du carré central,
soit $(c - d)^2$,

tandis que celui du joueur pariant sur le fait que l’écu rencontre un joint (au moins) est “mesuré” par l’aire de la “couronne”, soit $2cd - d^2$.

Le sort du premier joueur, qui parie sur franc-carreau est “mesuré” par l’aire du carré central, soit $(c - d)^2$,

tandis que celui du joueur pariant sur le fait que l’écu rencontre un joint (au moins) est “mesuré” par l’aire de la “couronne”, soit $2cd - d^2$.

Les sorts des deux joueurs sont donc égaux si ces aires sont égales, ce qui équivaut à ce que l’aire du carré central soit moitié de celle du carreau.

Rapport c/d pour faire jeu égal

Rapport *c*/*d* pour faire jeu égal

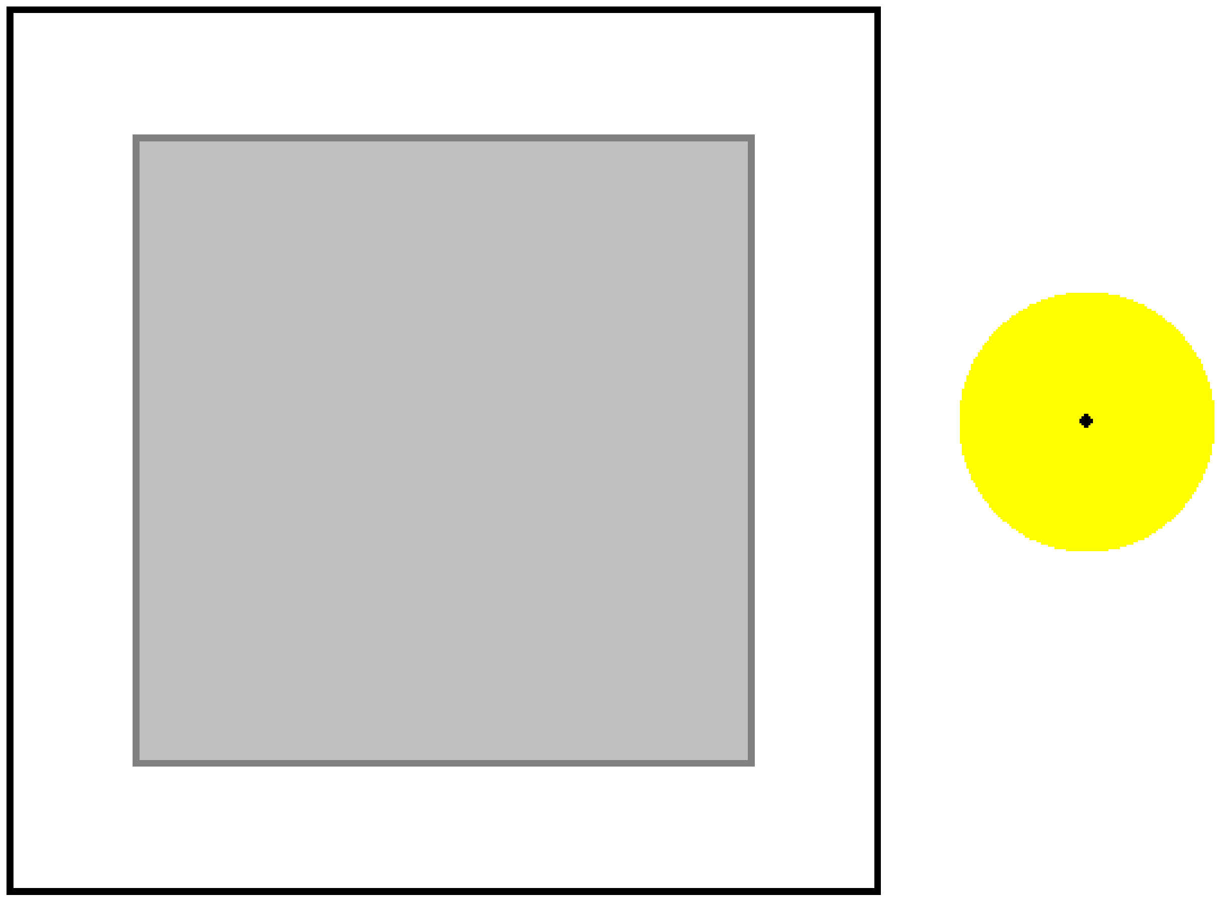
$$(c-d)^2=\frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow c-d=\frac{1}{\sqrt{2}}c \text{ car } c \text{ est positif}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d}-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{d}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{c}{d}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}\approx 3,41...$$

Configuration des sorts égaux entre joueurs 1 et 2



Loi de probabilité du cas 1

La probabilité pour que l’écu tombe à franc-carreau est

$$p_1 = \frac{c-d\ ^{2}}{c^2} = \frac{\left(\frac{c}{d}-1\right)^2}{\left(\frac{c}{d}\right)^2} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{r}\right)^2 \text{ où } r = \frac{c}{d}$$

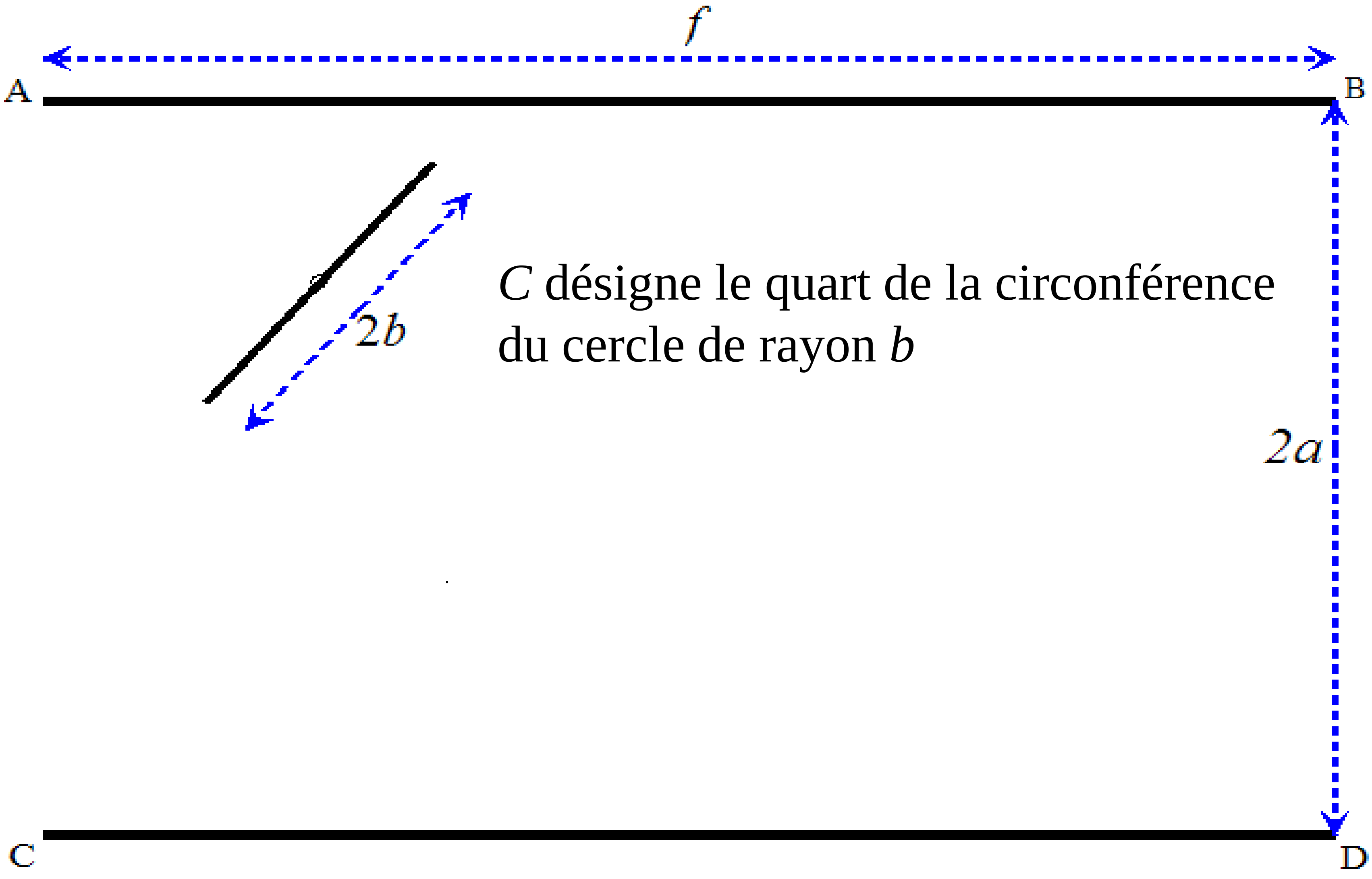
La probabilité pour que l’écu tombe sur un joint (au moins) est

$$p_2 = \frac{2r-1}{r^2}$$

Le jeu de la baguette

Je ſuppoſe que dans une chambre, dont le parquet eſt ſimplement diviſé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croiſera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croiſera quelques-unes de ces parallèles; on demande le ſort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu ſur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle ſans tête.*

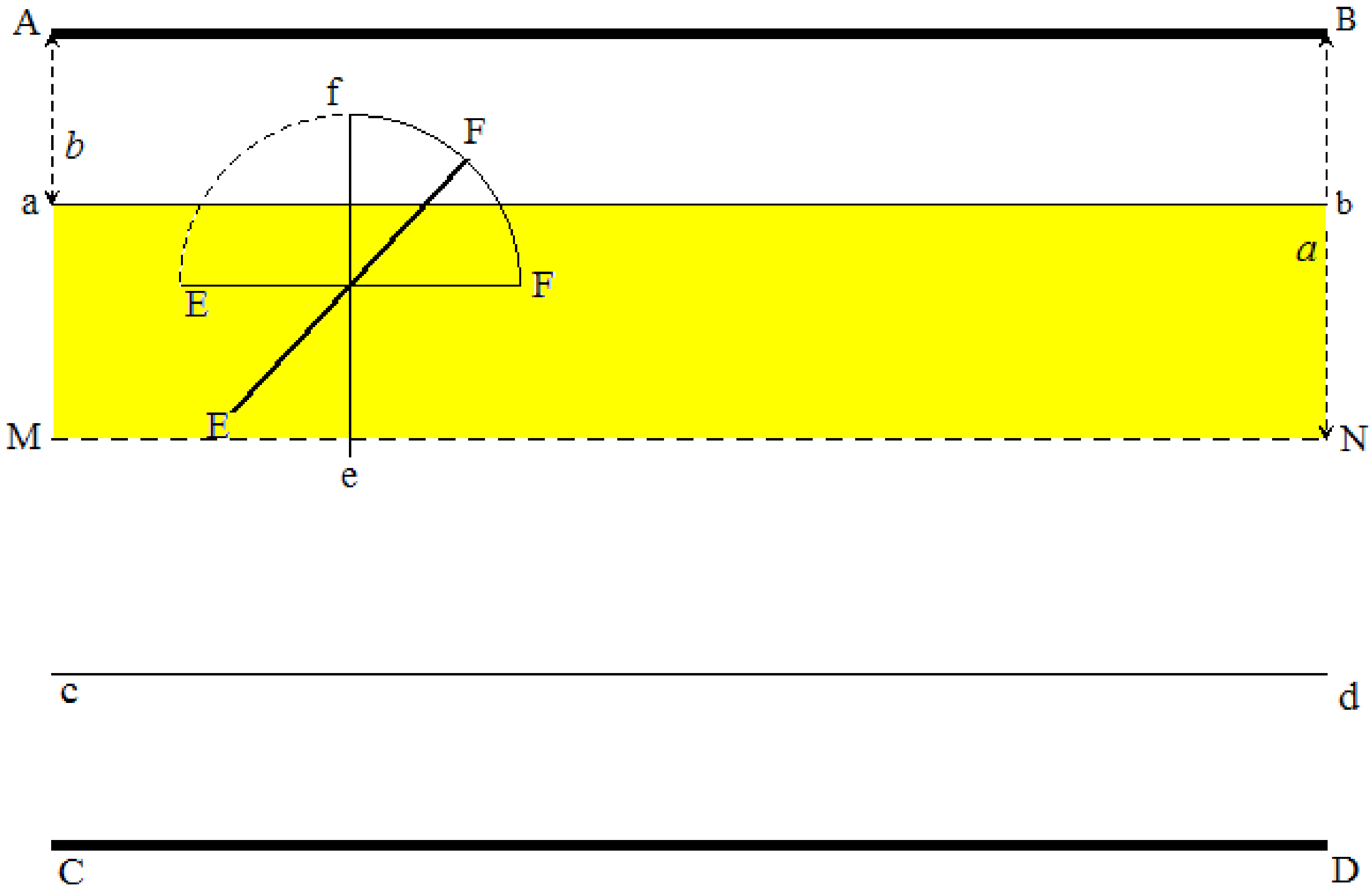
Donnée des dimensions



C désigne le quart de la circonférence du cercle de rayon b

Lame Baguette

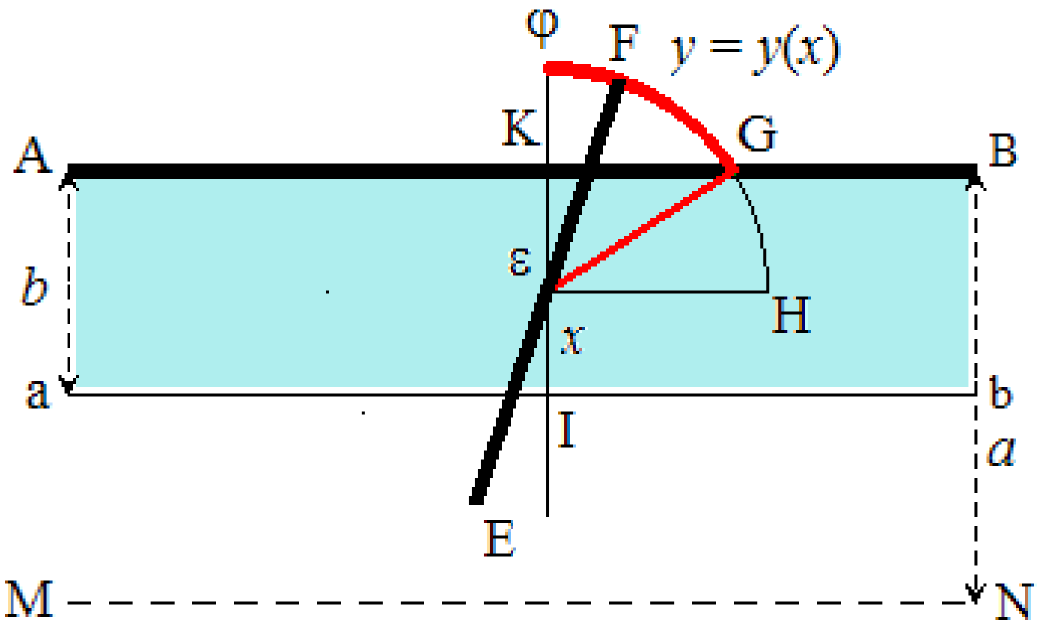
1^{er} cas : la bande centrale



Buffon “mesure” la “quantité” de positions de la baguette par le produit de l’aire de la bande par le quart de la circonférence du cercle de rayon *b*, à savoir par $\boldsymbol{f.(a-b).C}$.

Baguette 1

2^d cas : la bande latérale



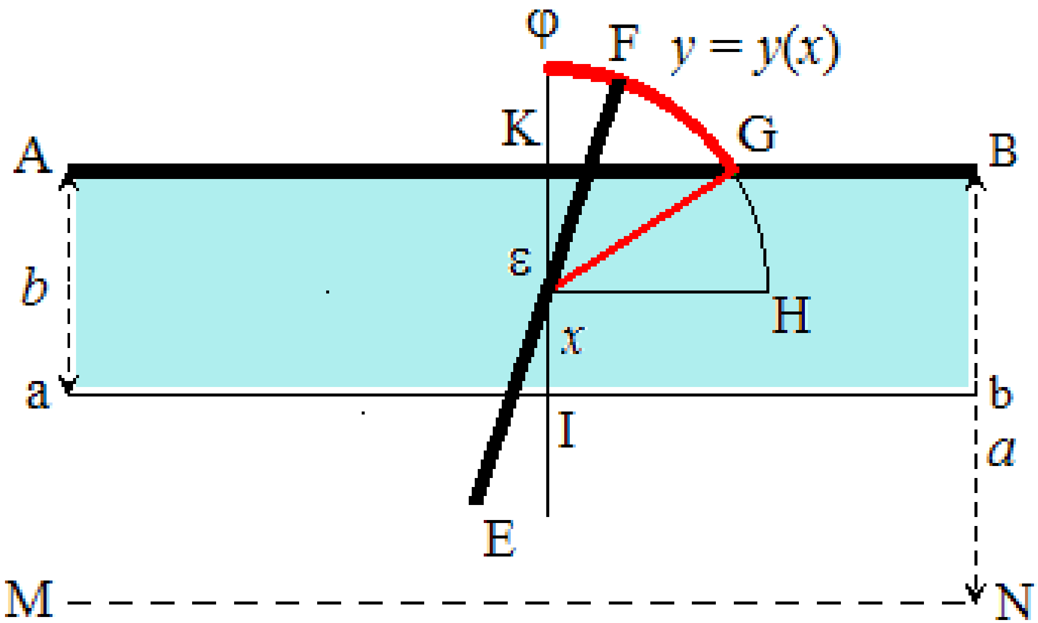
$x = I\varepsilon = K\varphi$

Pour une position fixée du milieu de la baguette, ε, la “quantité” de positions de la baguette, lorsqu’elle coupe le joint, est “mesurée” par la longueur de l’arc φG, notée *y* par Buffon.

On pose ici : longueur arc φG $= \; y \quad x \quad \left\{ = b.\arccos\frac{b-x}{b} \right\}$

Baguette 2

2^d cas : la bande latérale (suite 1)



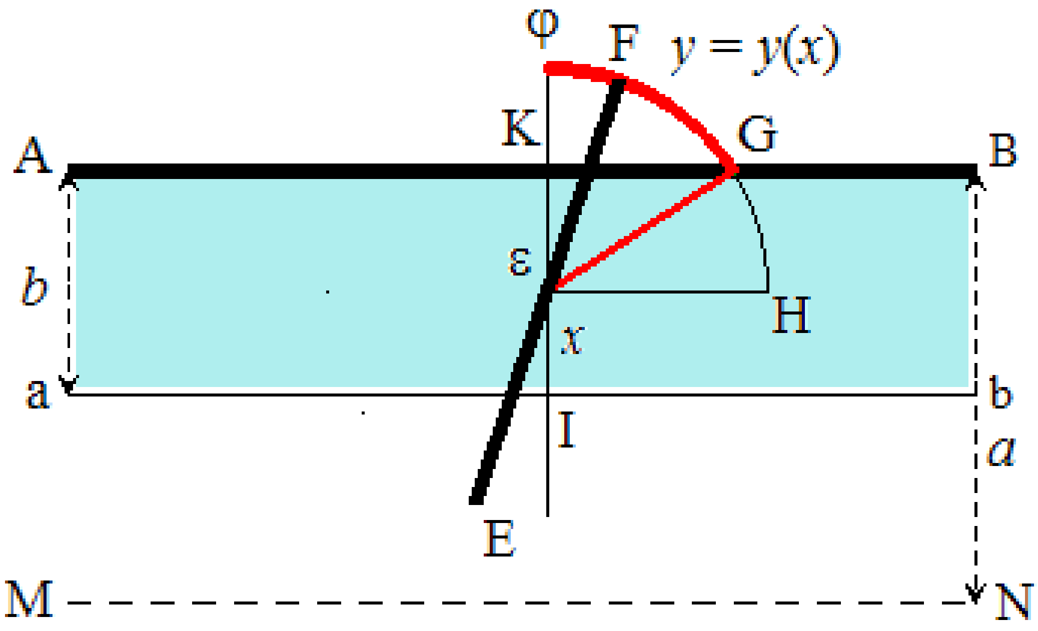
x = Iε = Kφ

Lorsque le milieu de la baguette ε parcourt le segment fixé [IK], la “quantité” de positions de la baguette, lorsqu’elle coupe le joint, est “mesurée” par la “somme” des longueurs des arcs φG, notée $\int y\,dx$ par Buffon.

Plus précisément, cette “somme” est ici notée $\int_0^b y \quad x \quad dx$

Baguette 2

2^d cas : la bande latérale (suite 2)



x = Iε = Kφ

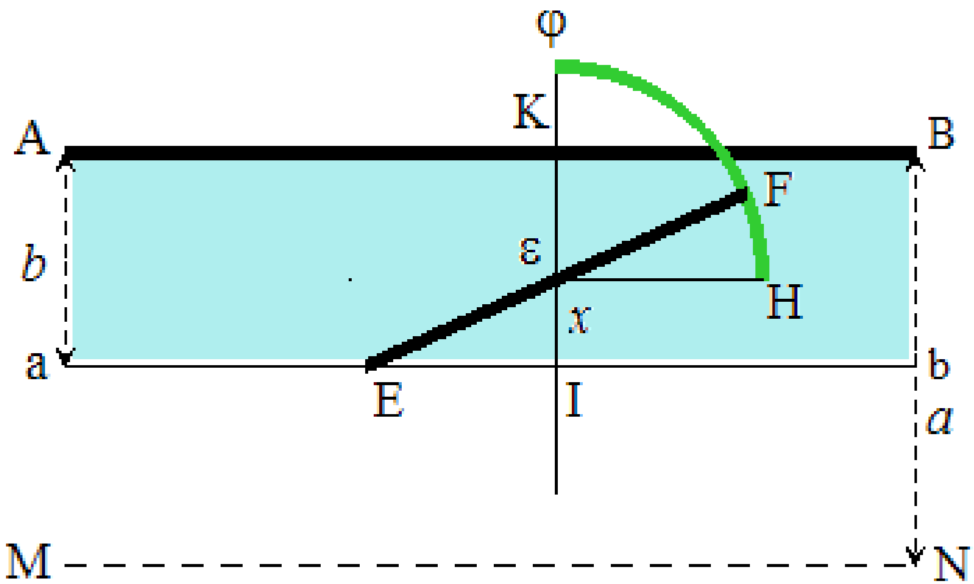
Lorsque le milieu de la baguette ε parcourt le rectangle ABba,

la “quantité” de positions de la baguette, lorsqu’elle coupe le joint, est “mesurée” par le produit de $\int y\,dx$ par la longueur f de la lame, notée $f \, . \int y\,dx$ par Buffon.

ou encore $f \, . \int_0^b y\;\;x\;\;\;dx$

Baguette 2

2^d cas : la bande latérale (suite 3)



x = Iε = Kφ

Lorsque le milieu de la baguette ε parcourt le rectangle ABba,

la “quantité” **totale** de positions de la baguette est “mesurée” par le produit de l’aire du rectangle ABba par la longueur de l’arc φH, noté *f.b.C*.

Donc la “quantité” de positions de la baguette, lorsqu’elle ne coupe pas le joint, est “mesurée” par $f.b.C - f.\int y\,dx = f\;\; bC - \int y\,dx$

Baguette 2

Bilan

Bilan

La baguette	La “quantité” de positions est “mesurée” par
ne coupe pas le joint (joueur 1)	
coupe le joint (joueur 2)	

Bilan

La baguette	La “quantité” de positions est “mesurée” par
ne coupe pas le joint (joueur 1)	$f\,.\;\;a-b\;\;.C+f\,.\;\;bC-\int y\,dx$ $=f\,.\;\;aC-\int y\,dx$
coupe le joint (joueur 2)	

Bilan

La baguette	La “quantité” de positions est “mesurée” par
ne coupe pas le joint (joueur 1)	$f.\ \ a-b\ \ .C+f.\ \ bC-\int y\,dx$ $= f.\ \ aC-\int y\,dx$
coupe le joint (joueur 2)	$f.\int y\,dx$

Bilan

La baguette	La "quantité" de positions est "mesurée" par
ne coupe pas le joint (joueur 1)	$f.\ \ a-b\ \ .C+f.\ \ bC-\int y\,dx$ $= f.\ \ aC-\int y\,dx$
coupe le joint (joueur 2)	$f.\int y\,dx$

Donc $\dfrac{\text{sort joueur 1}}{\text{sort joueur 2}} = \dfrac{f.\ \ a.C-\int y\,dx}{f.\int y\,dx} = \dfrac{a.C-\int y\,dx}{\int y\,dx}$

Condition d’un jeu égal

Condition d'un jeu égal

Il y a donc jeu égal entre les deux joueurs si

$$aC - \int y\, dx = \int y\, dx$$

Condition d'un jeu égal

Il y a donc jeu égal entre les deux joueurs si

$$aC - \int y\,dx = \int y\,dx$$

Ce qui équivaut à

$$aC = 2\int y\,dx$$

Condition d'un jeu égal

Il y a donc jeu égal entre les deux joueurs si

$$aC - \int y\,dx = \int y\,dx$$

Ce qui équivaut à

$$aC = 2\int y\,dx$$

soit

$$a = \frac{2\int y\,dx}{C} = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}C}\left\{ = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}b} = \frac{\int y\,dx}{\frac{\pi}{4}b} = \frac{4\int y\,dx}{\pi b} \right\}$$

Mais comment évaluer $\int y\,dx$?

Voici la réponse de Buffon :

Si l'on veut donc que le jeu ſoit égal, l'on aura $ac = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}c}$, c'eſt-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2\,b$ longueur de la baguette ; or, on ſait que cette aire de cycloïde eſt égale au carré du rayon,

[…]

Mais comment évaluer $\int y\,dx$?

Voici la réponse de Buffon :

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $ac = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, $\boxed{\text{à l'aire d'une}}$ $\boxed{\text{partie de cycloïde}}$, dont le cercle générateur a pour diamètre $2\,b$ longueur de la baguette ; or, on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon,

[…]

Mais comment évaluer $\int y\,dx$?

Voici la réponse de Buffon :

Si l'on veut donc que le jeu ſoit égal, l'on aura $ac = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}c}$, c'eſt-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2\,b$ longueur de la baguette ; or, on ſait que cette aire de cycloïde eſt égale au carré du rayon,

[…]

Deux questions à résoudre

Deux questions à résoudre

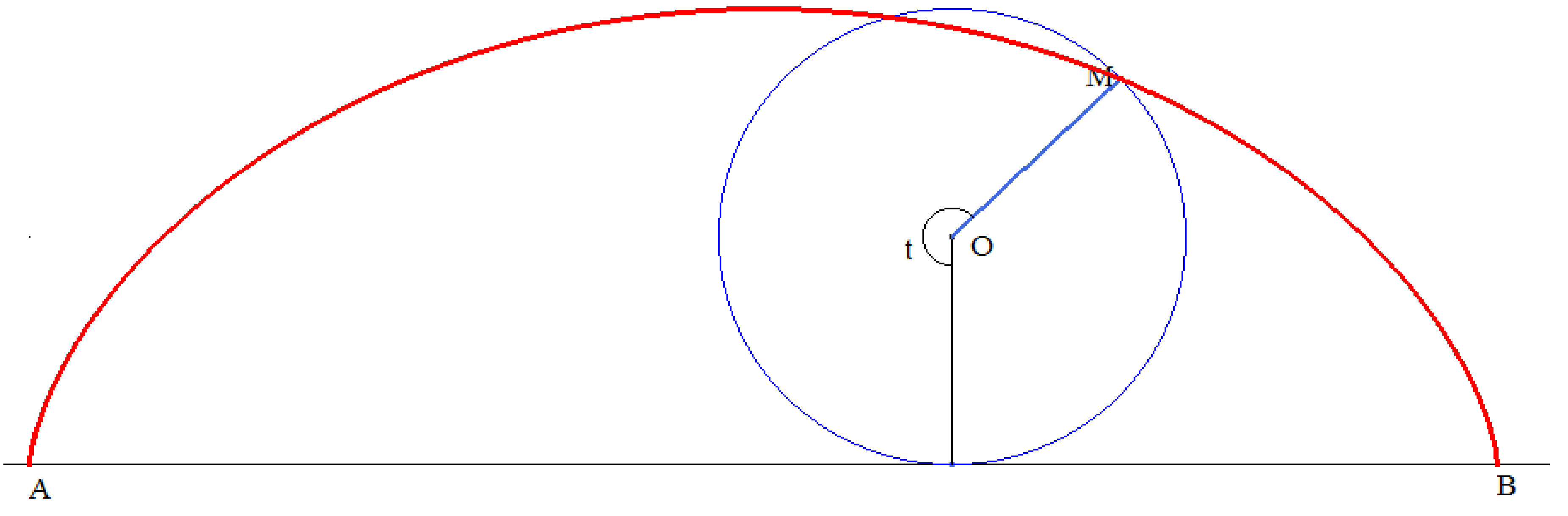
1) Identifier la partie de cycloïde concernée

Deux questions à résoudre

1) Identifier la partie de cycloïde concernée

2) Montrer que son aire vaut le carré sur le rayon du cercle générateur

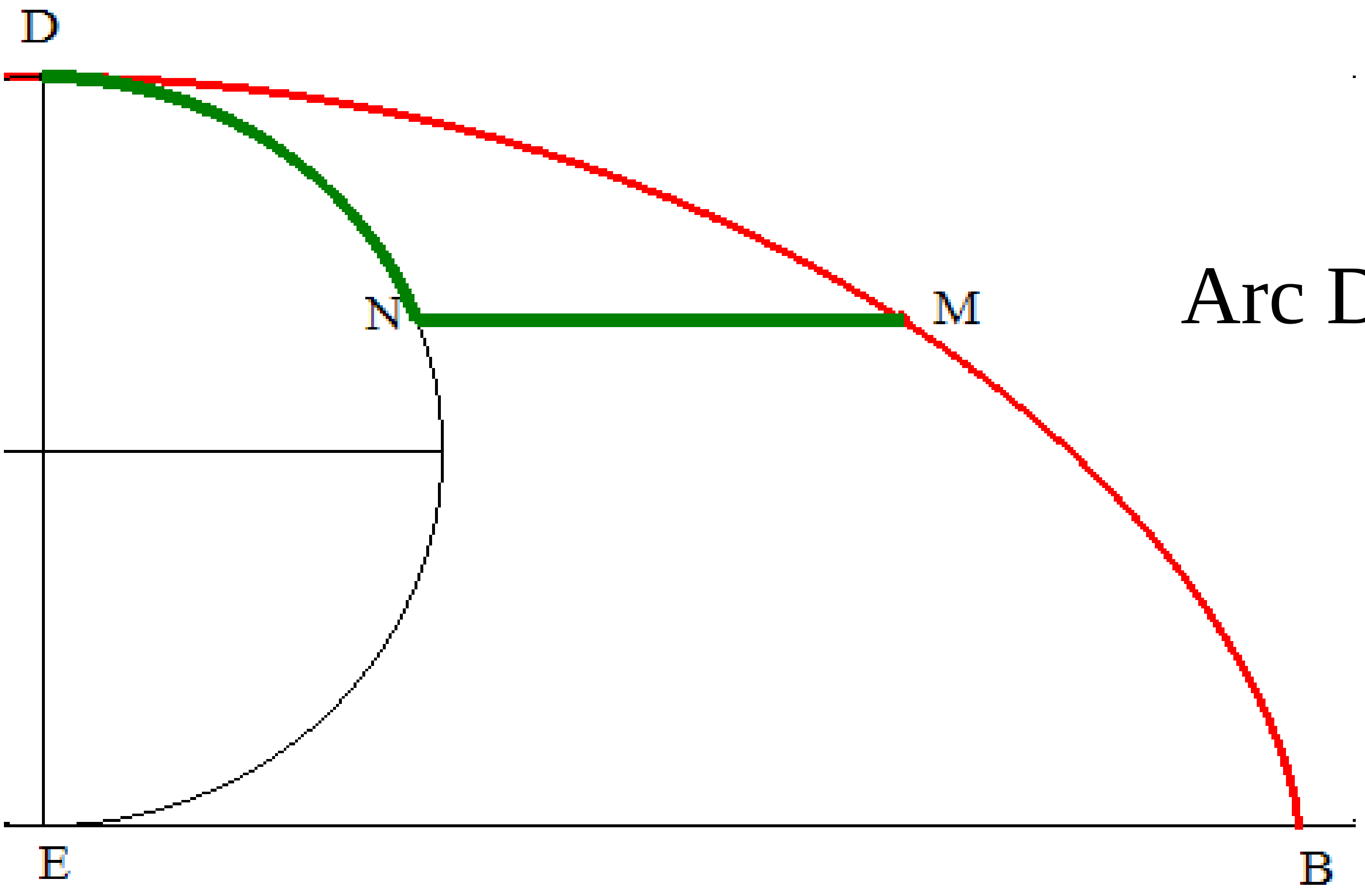
Qu’est-ce qu’une cycloïde ?



Définition de la Cycloïde

Deux propriétés “simples” mais utiles de la cycloïde

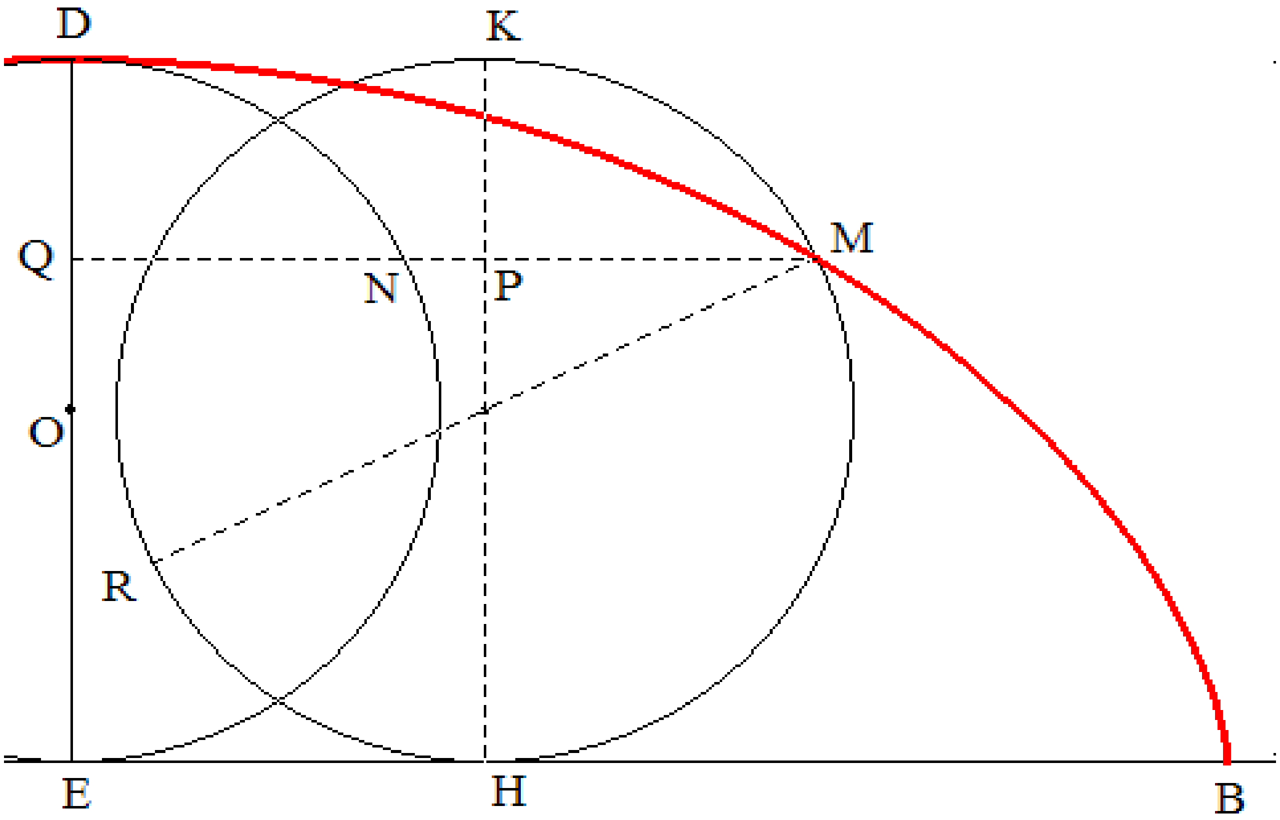
1. Propriété caractéristique



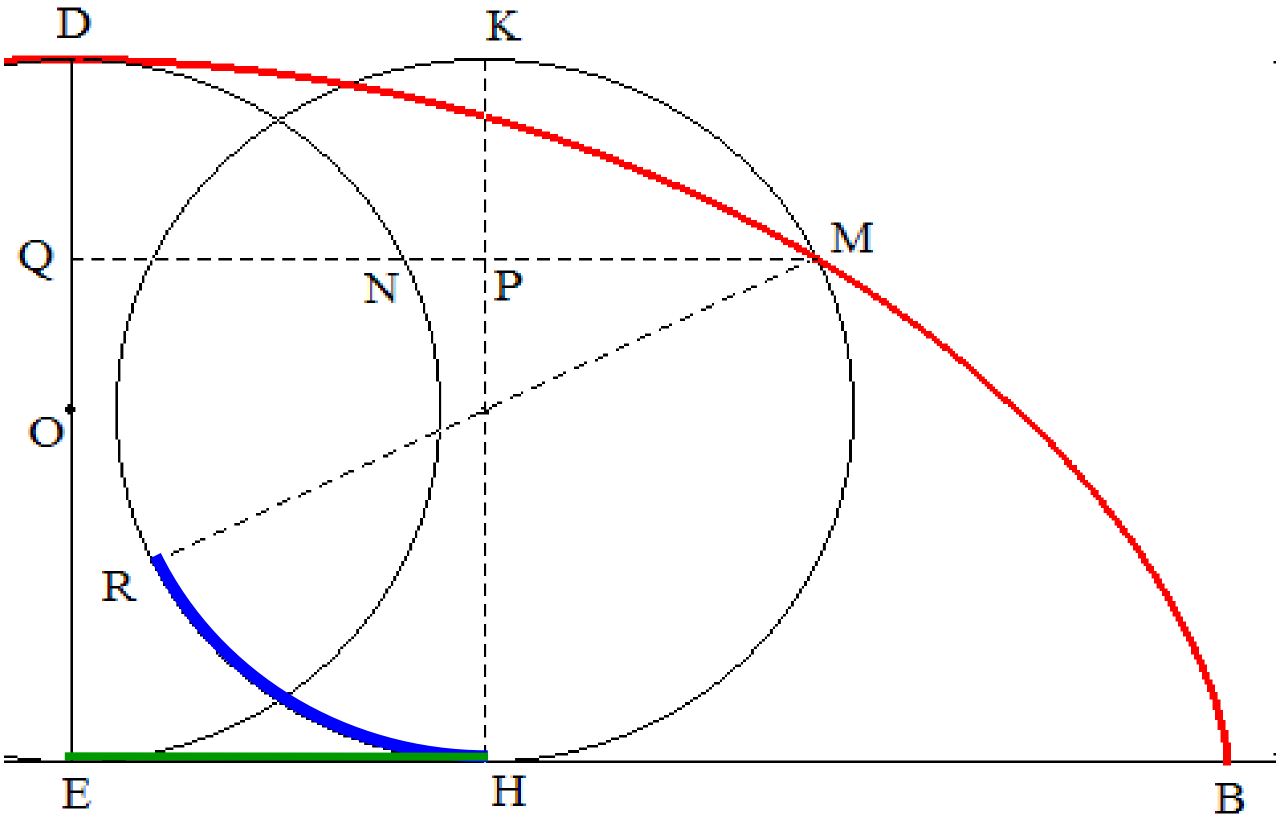
Arc DN = NM

Cycloïde Propriété Caractéristique 1

(Dé)monstration

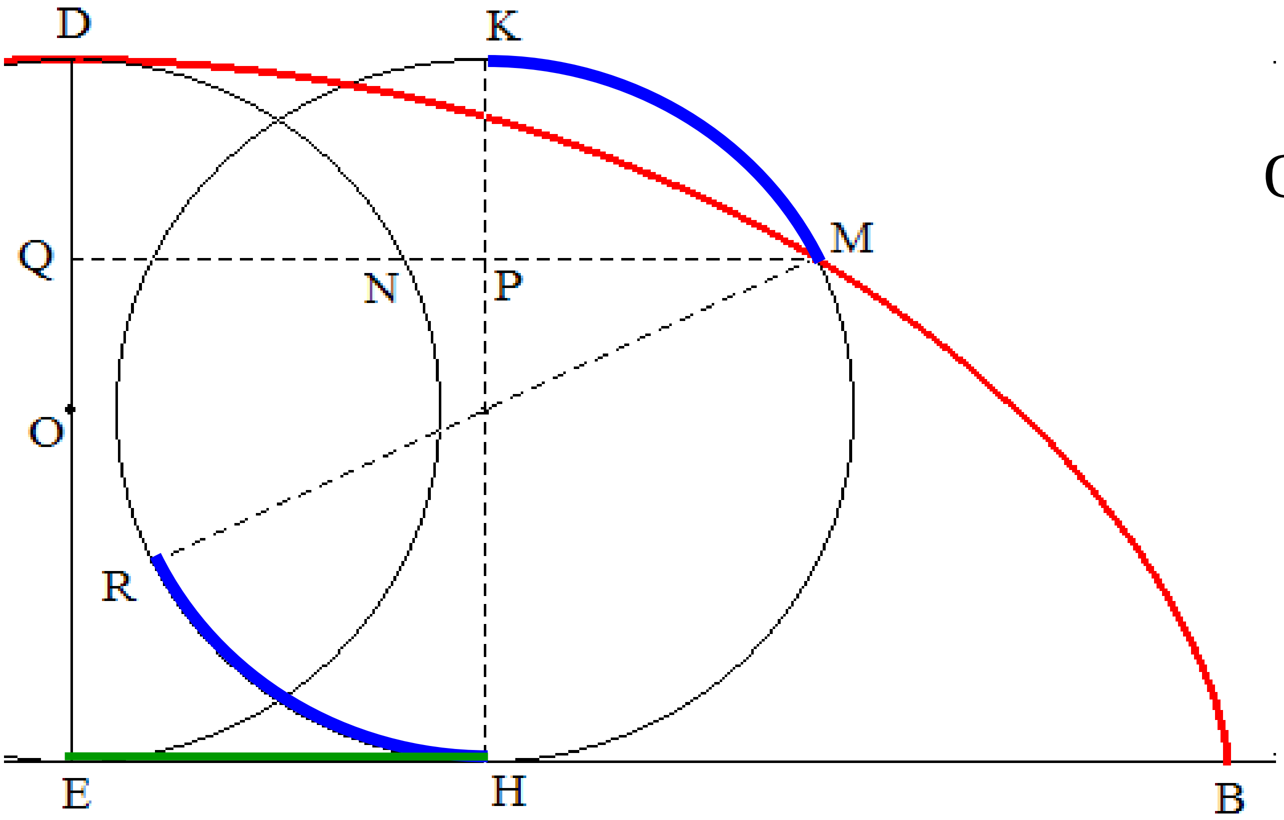


(Dé)monstration



Arc RH = EH

(Dé)monstration

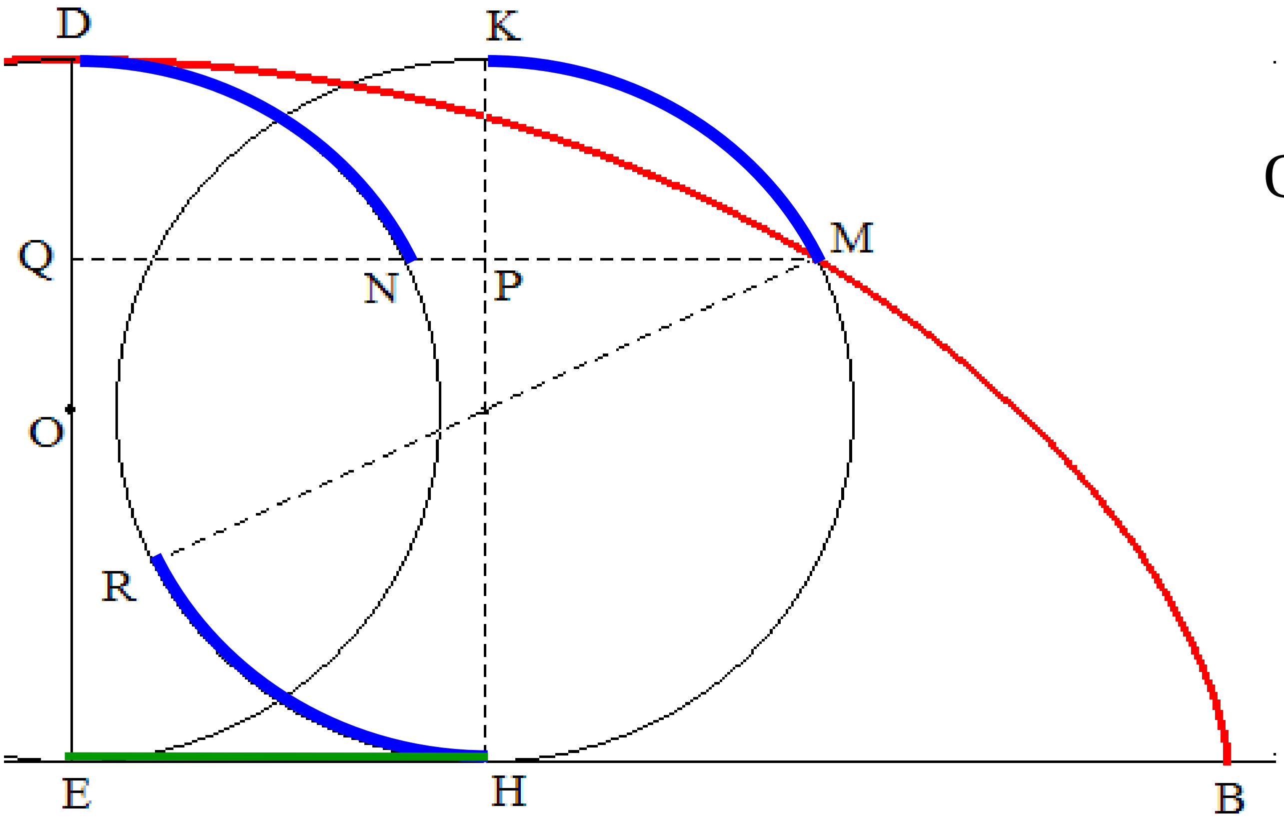


Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

(Dé)monstration



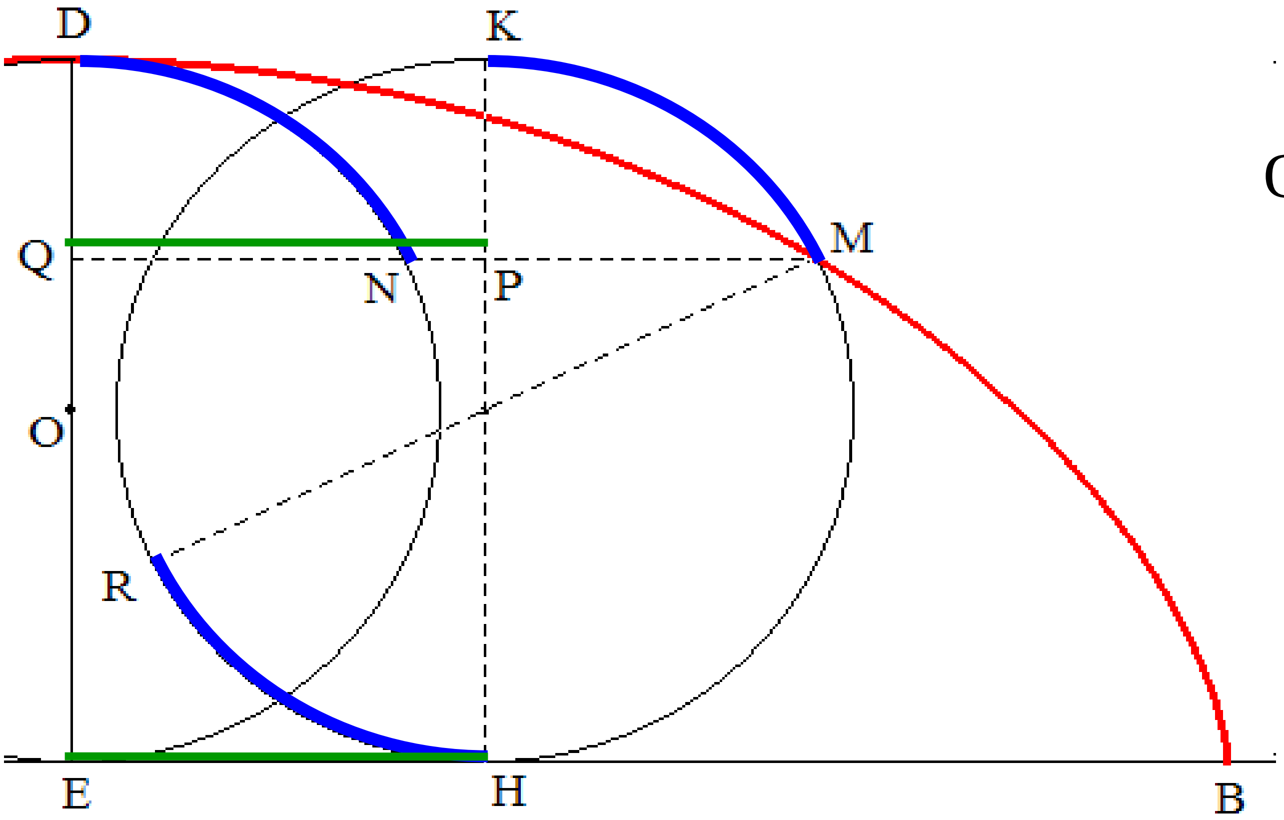
Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

= arc ND

(Dé)monstration



Arc RH = EH

Or

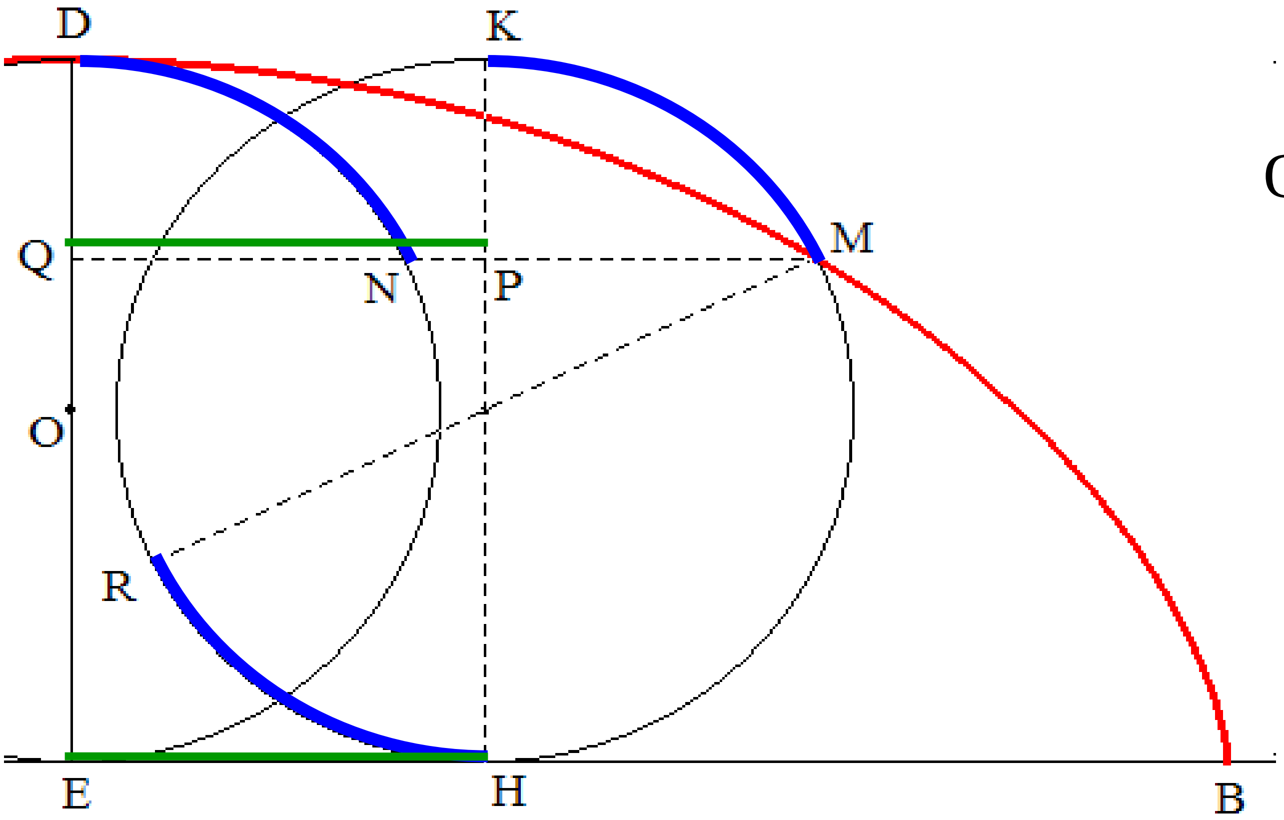
Arc RH = arc MK

= arc ND

Et

EH = QP

(Dé)monstration



Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

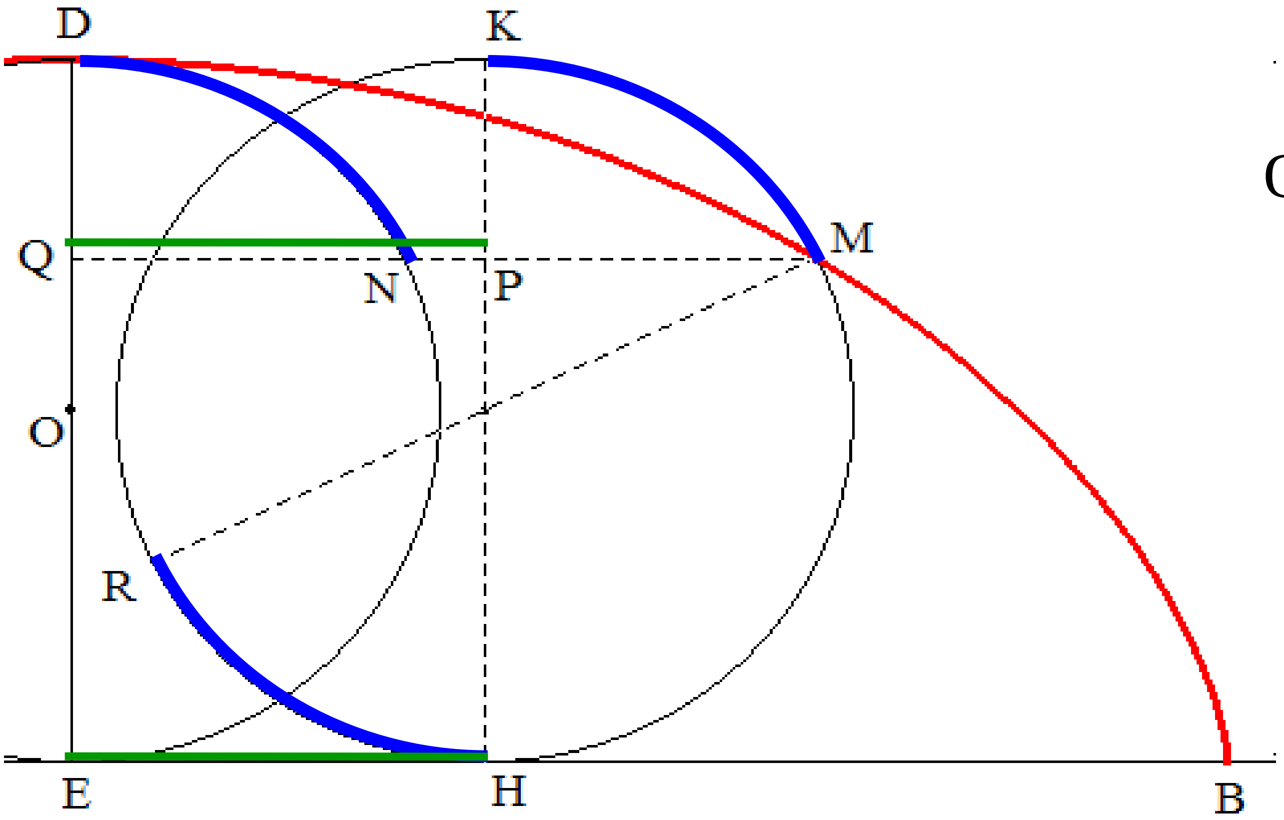
= arc ND

Et

EH = QP

= QN + NP

(Dé)monstration



Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

= arc ND

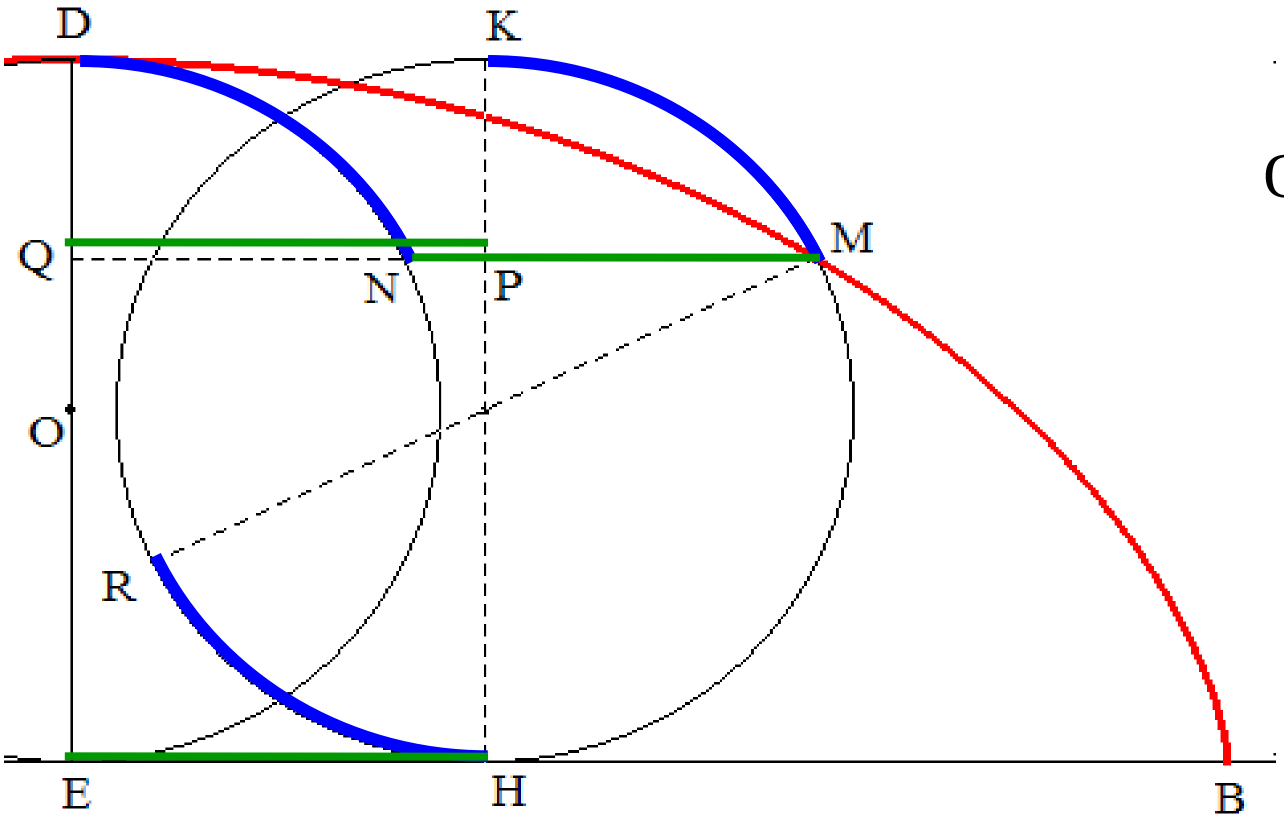
Et

EH = QP

= QN + NP

= MP + PN

(Dé)monstration



Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

= arc ND

Et

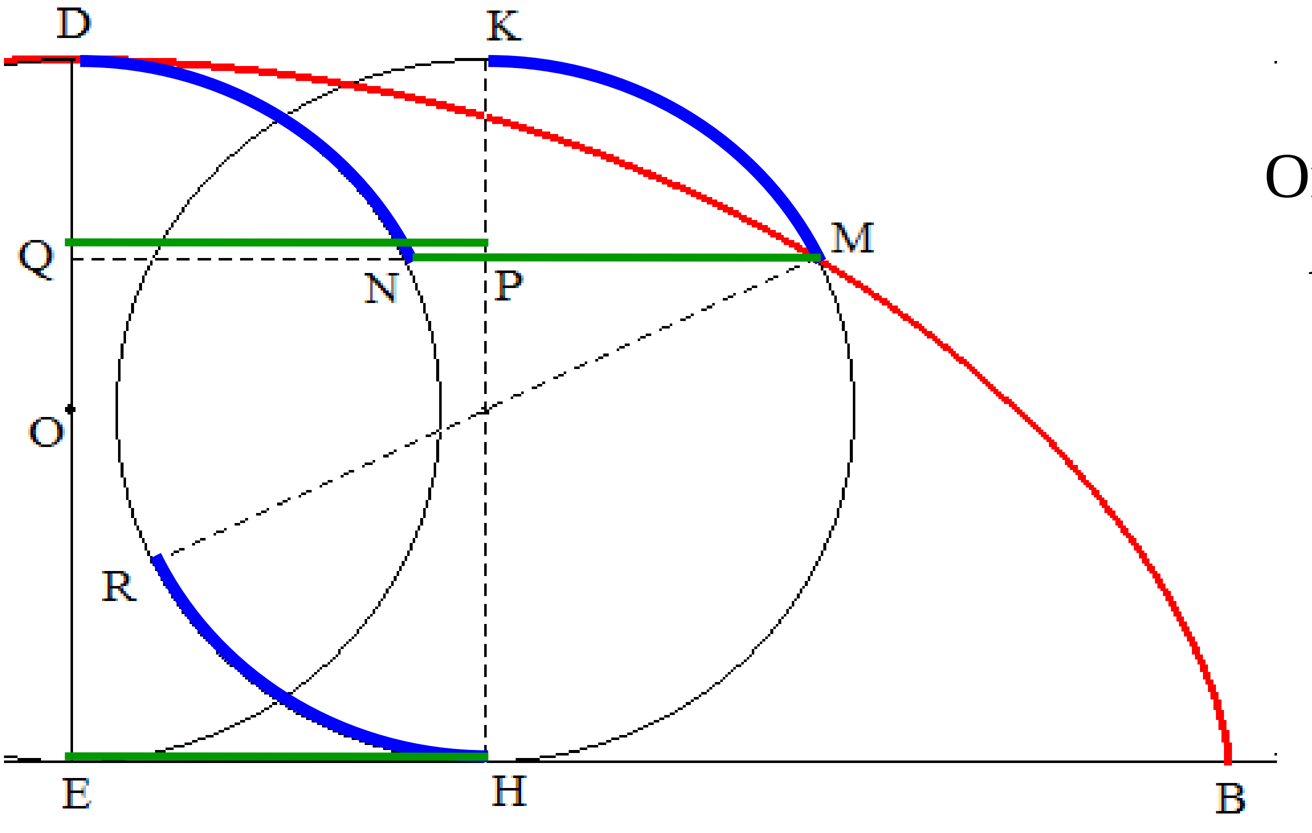
EH = QP

= QN + NP

= MP + PN

= MN

(Dé)monstration



Arc RH = EH

Or

Arc RH = arc MK

= arc ND

Et

EH = QP

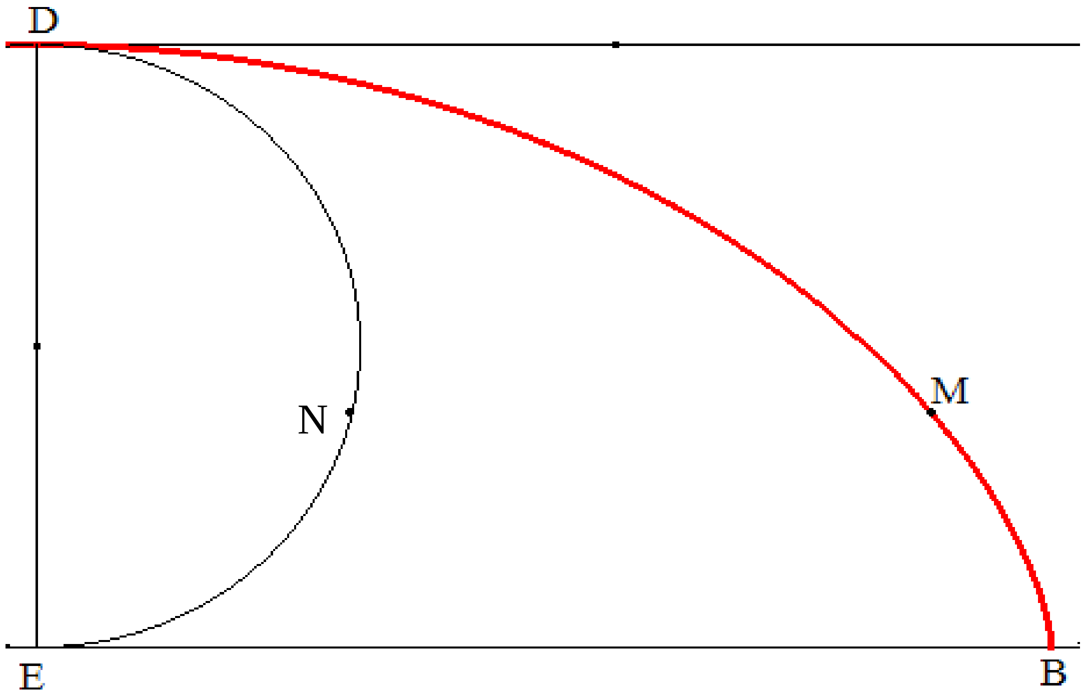
= QN + NP

= MP + PN

= MN

Donc **Arc DN = NM**

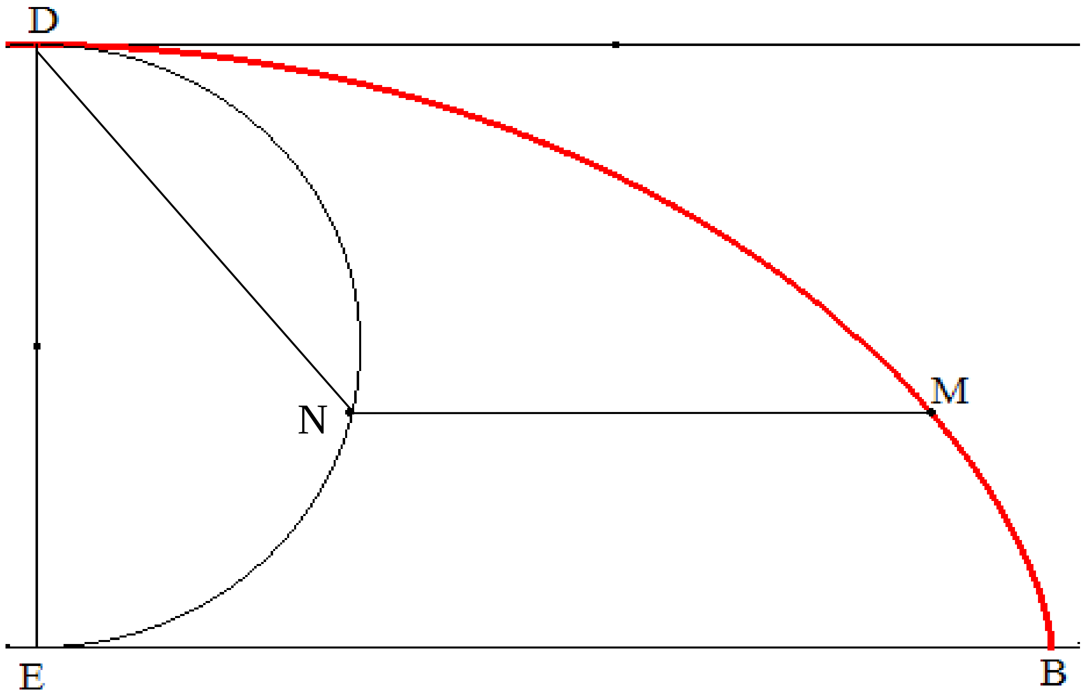
2. Construction de la tangente



Point M sur la cycloïde

Tangente

2. Construction de la tangente

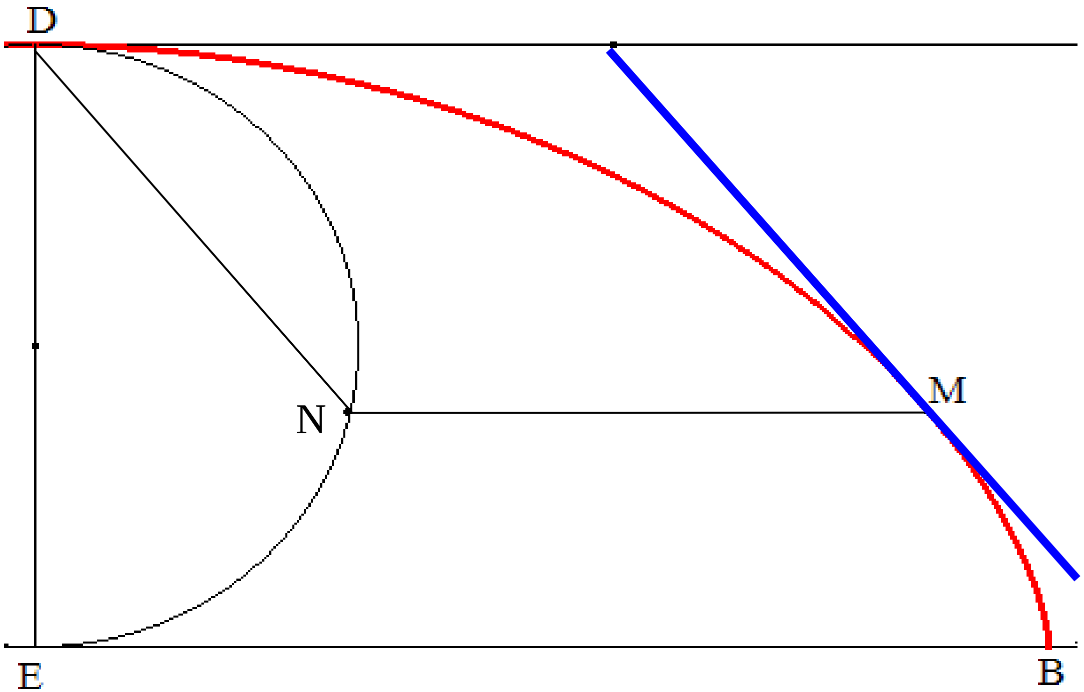


Point M sur la cycloïde

La parallèle à (BE) par M coupe le cercle en N

Tangente

2. Construction de la tangente



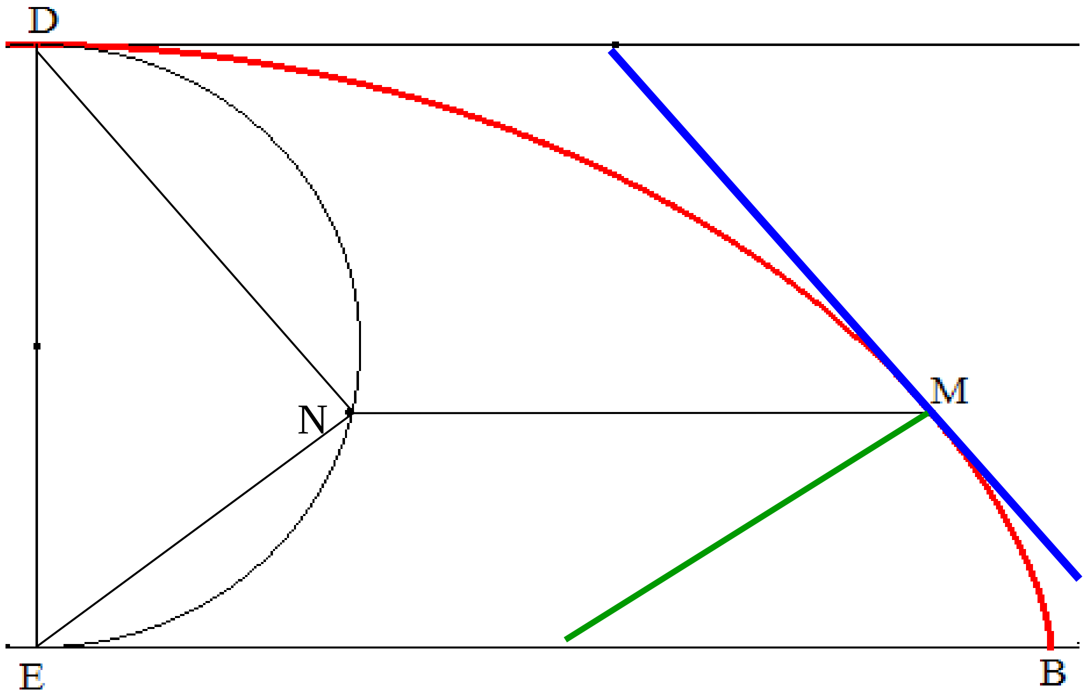
Point M sur la cycloïde

La parallèle à (BE) par M coupe le cercle en N

La parallèle à (DN) par M est la tangente à la cycloïde en M

Tangente

2. Construction de la tangente



Point M sur la cycloïde

La parallèle à (BE) par M coupe le cercle en N

La parallèle à (DN) par M est la tangente à la cycloïde en M

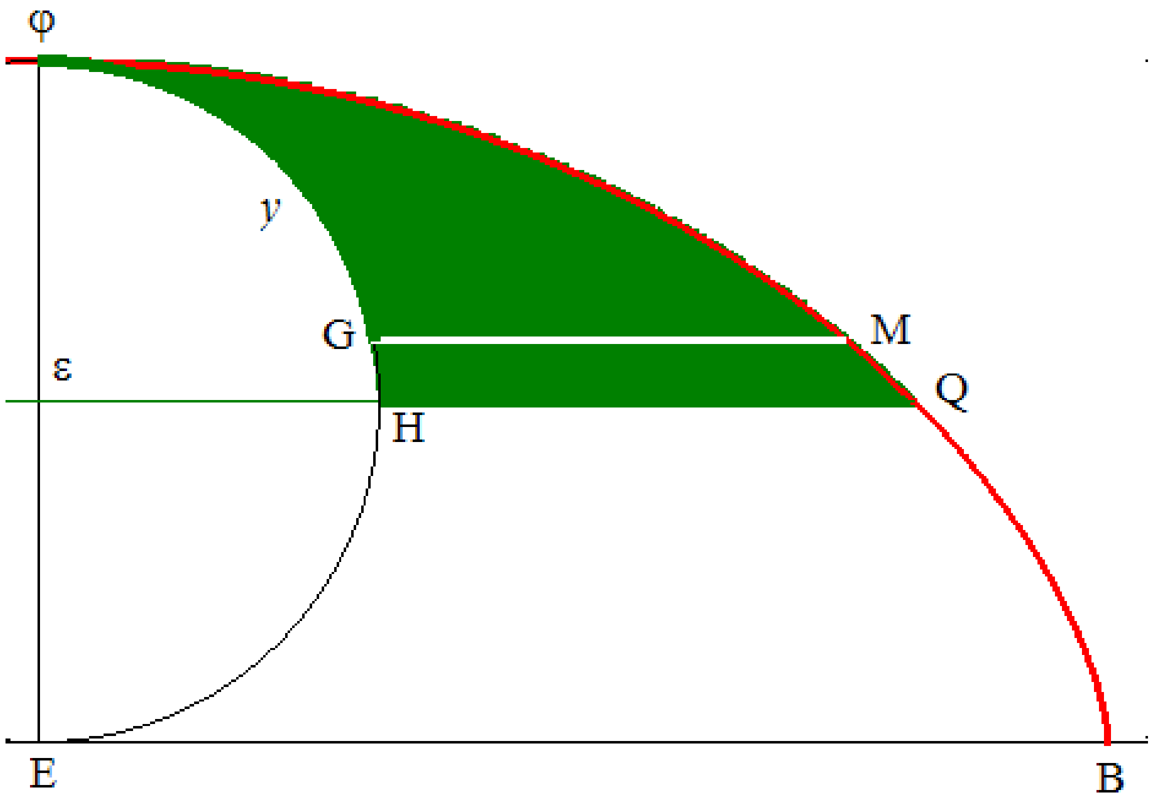
Tangente

“SOMMATION” DE TOUS LES ARCS φG CONTENUS DANS φH

[Partie Cycloïde]

“SOMMATION” DE TOUS LES ARCS φG CONTENUS DANS φH

[Partie Cycloïde]



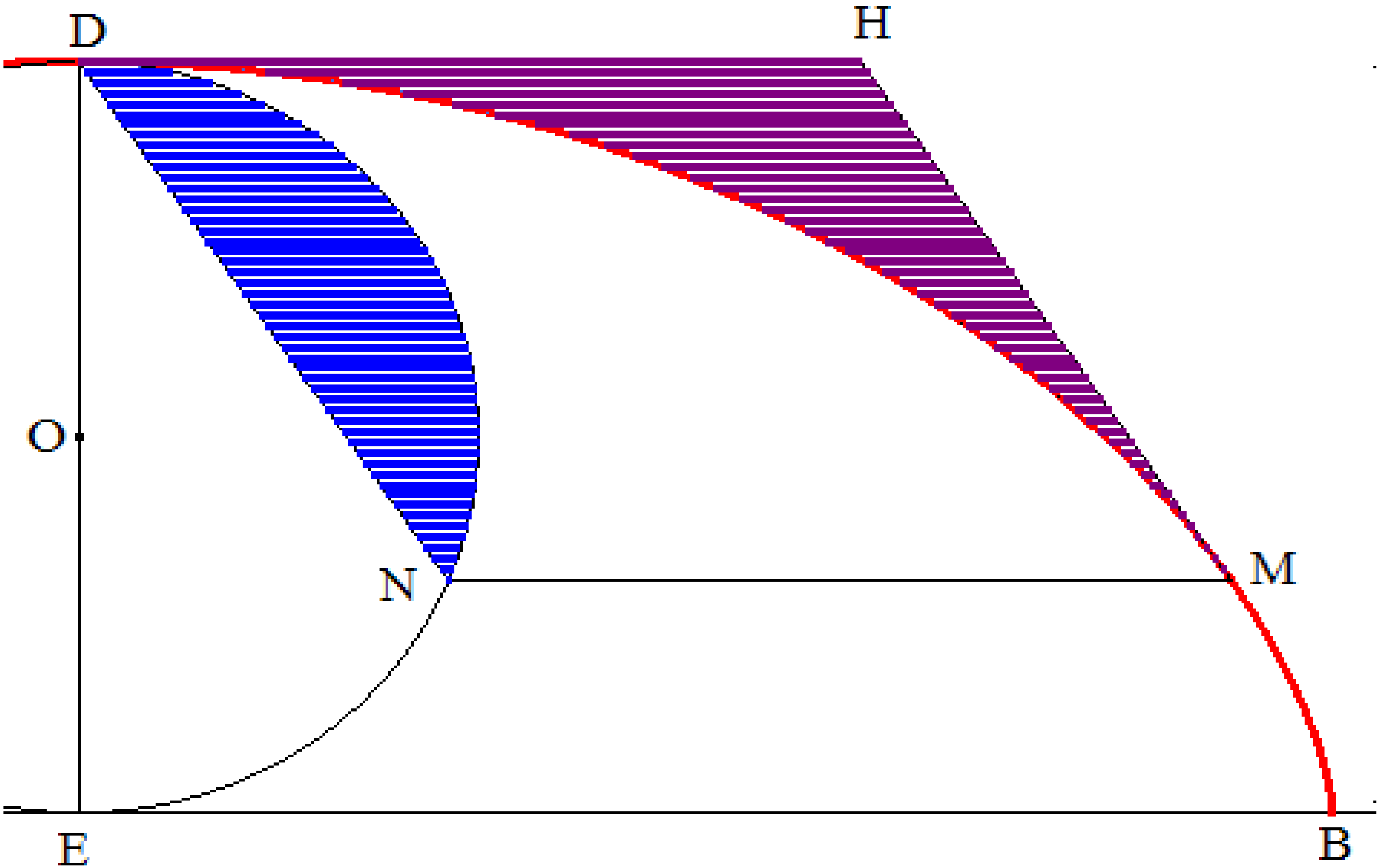
$$\int y\, dx = \text{aire de la “corne” } \varphi\text{MQHG}$$

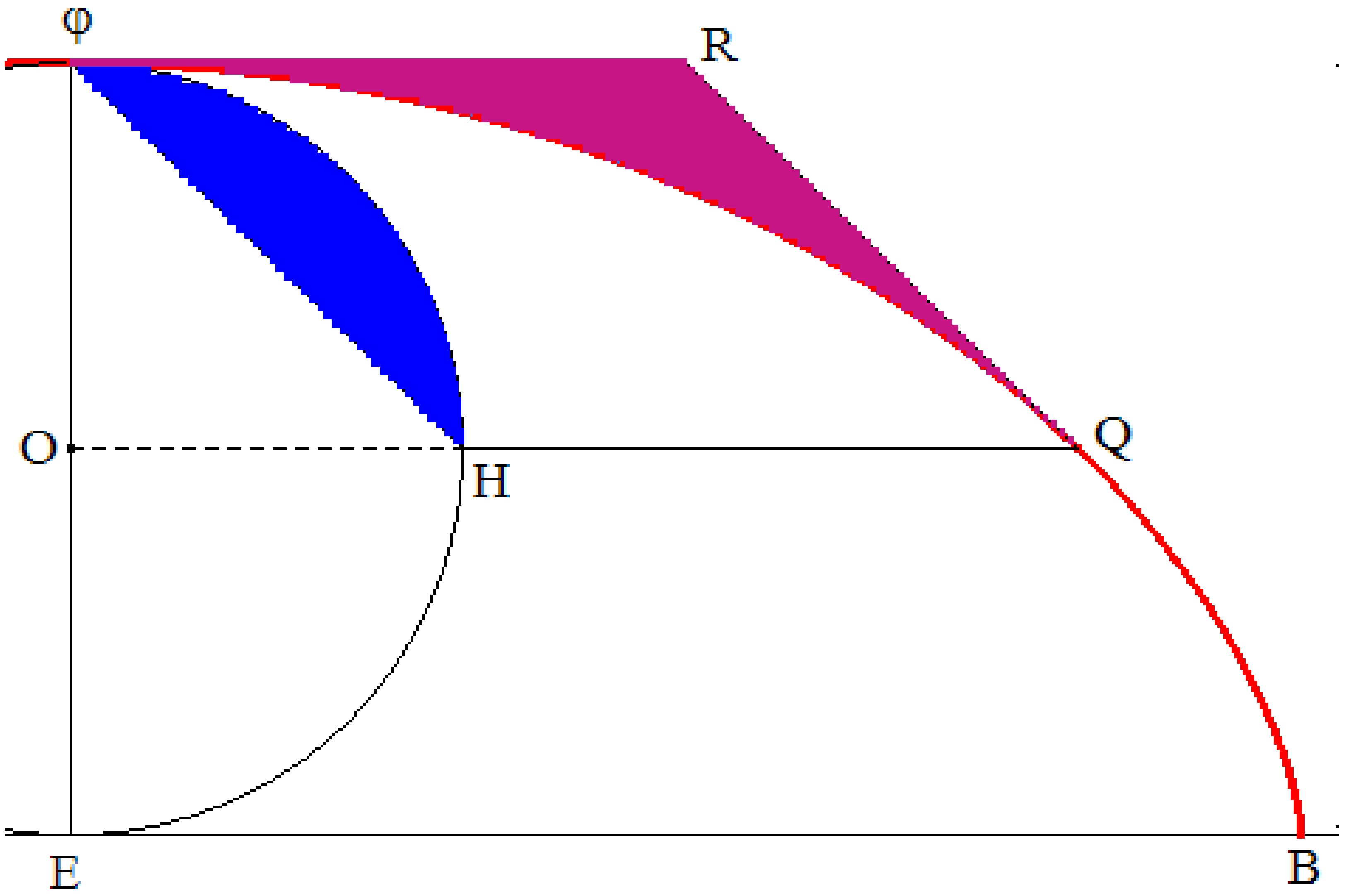
AIRE DU TRIANGLE MIXTILIGNE DHM

=

AIRE DU SEGMENT CIRCULAIRE DN

Parties égales

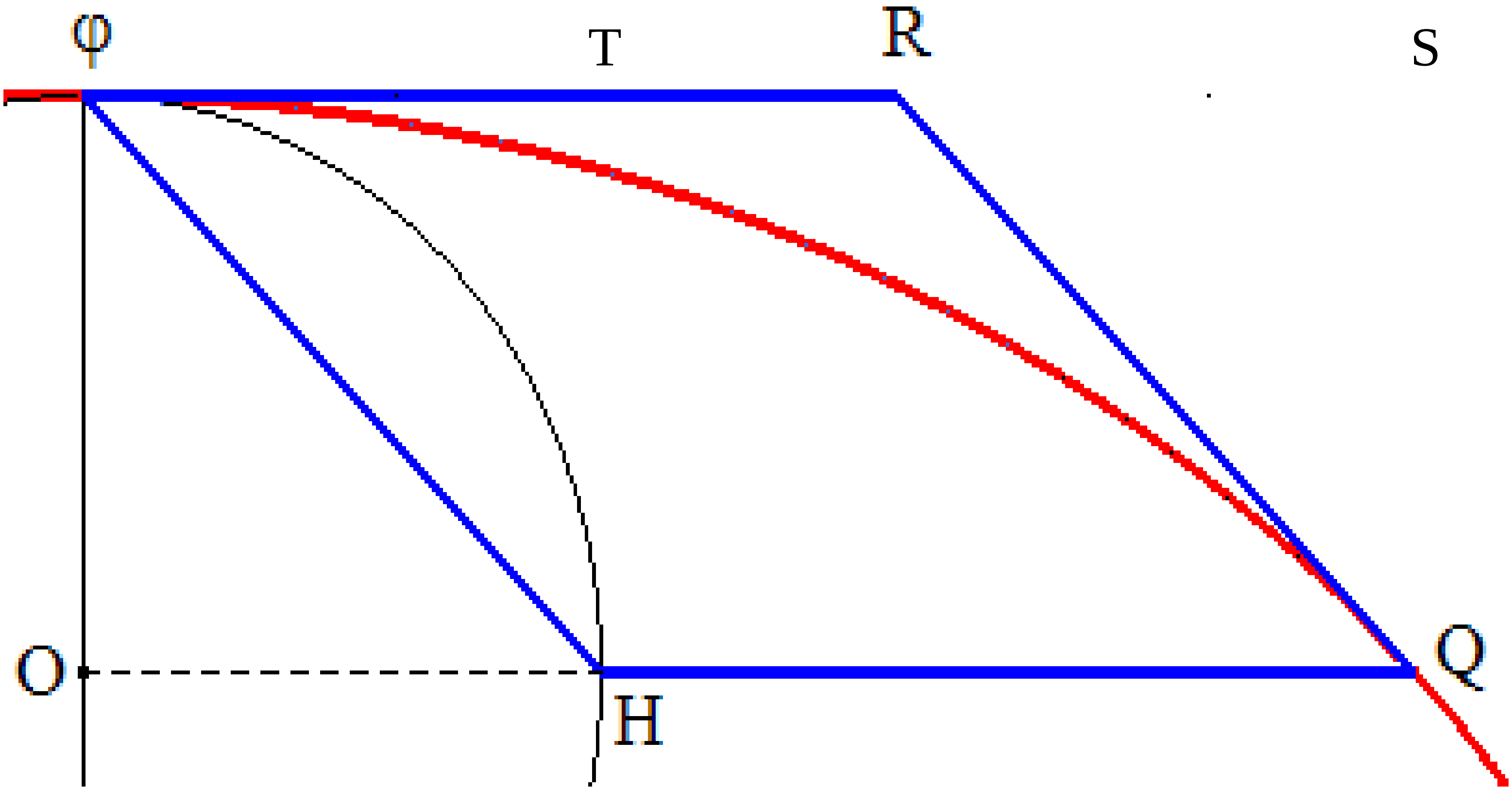




$$\mathcal{A}(\text{“corne”}\varphi HQ) = \mathcal{A}(\square \varphi HQR) - \mathcal{A}(\text{segm } \varphi H) - \mathcal{A}(\text{tril } \varphi RQ)$$

$$= \mathcal{A}(\square \varphi HQR) - 2\mathcal{A}(\text{segm } \varphi H)$$

Aire du parallélogramme φHQR

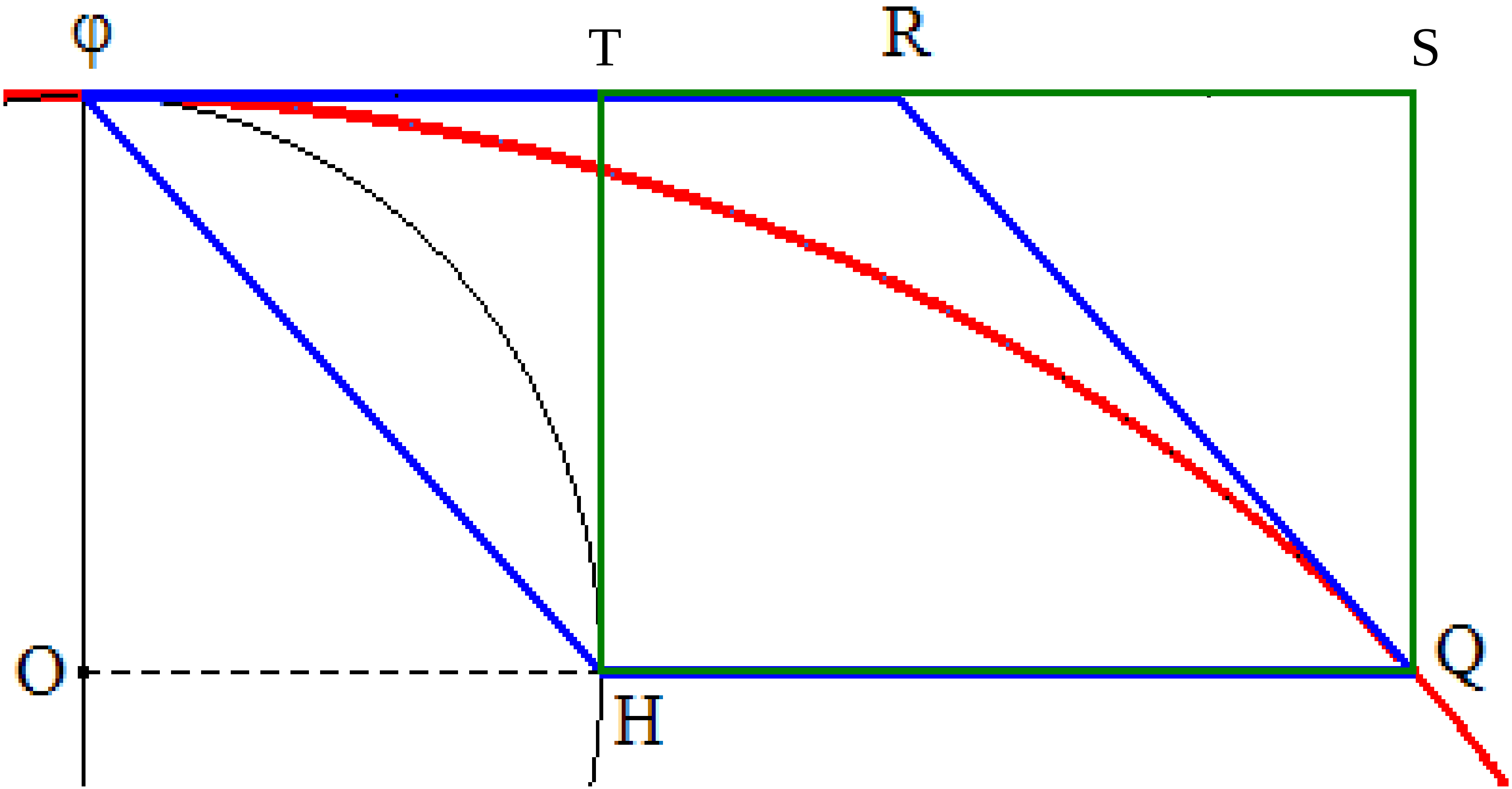


Aire (▱φHQR) = Aire (▱THQS)

(Euclide, I, 35)

Aire parallélogramme 1

Aire du parallélogramme φHQR



Aire (▱φHQR) = Aire (▱THQS)

(Euclide, I, 35)

Aire parallélogramme 1

Aire du parallélogramme φHQR (2)

Rappel (d'après Archimède, *La Mesure du cercle*, prop. 1)

L'aire d'un disque est celle du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit :

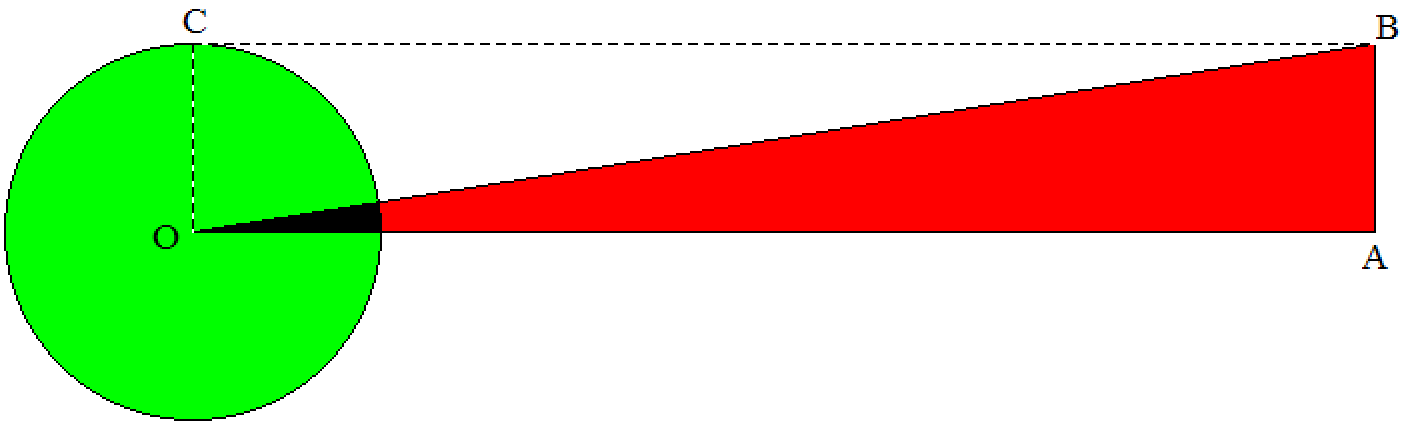
* la circonférence du disque
* le rayon du disque

Aire du parallélogramme φHQR (2)

Rappel (d'après Archimède, *La Mesure du cercle*, prop. 1)

L'aire d'un disque est celle du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit :

* la circonférence du disque
* le rayon du disque

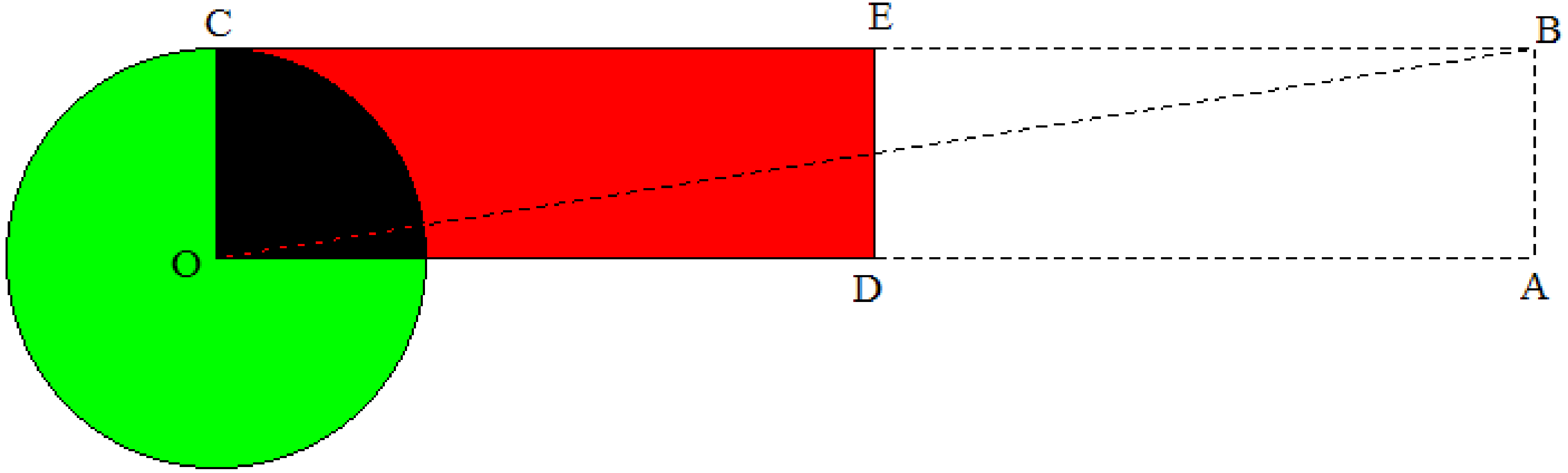


Aire du parallélogramme φHQR (3)

Donc l’aire d’un disque est celle du rectangle ayant pour côtés : * la demi circonférence du disque

* le rayon du disque

(Euclide, I, 41)



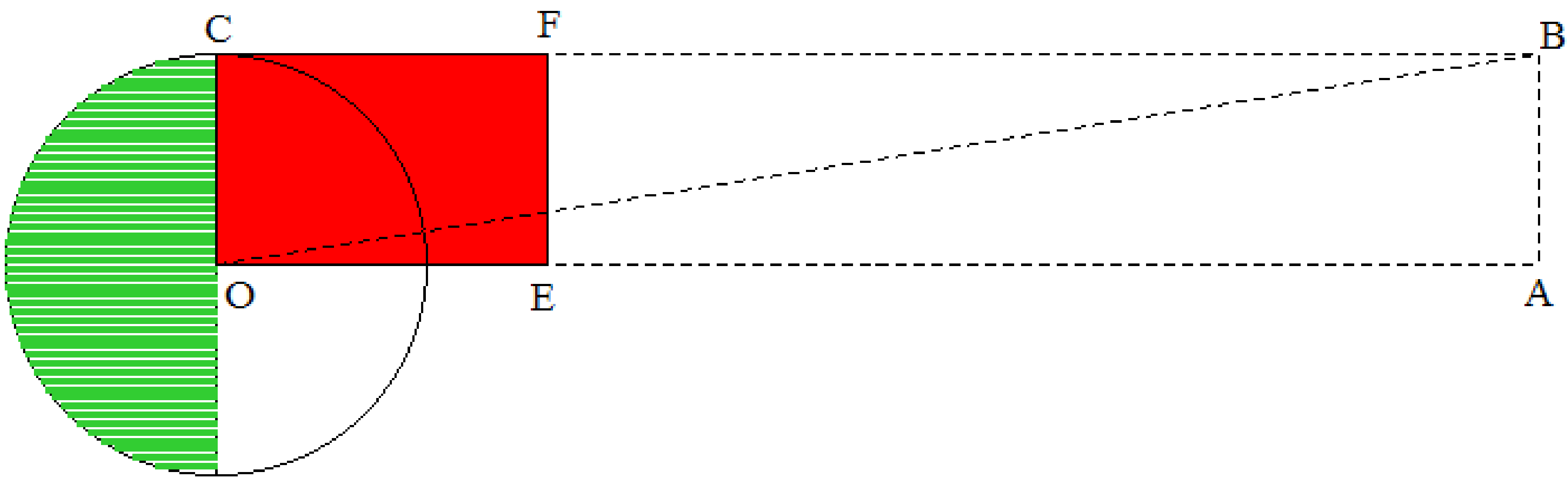
Aire du parallélogramme φHQR (4)

Donc l'aire du rectangle ayant pour côtés :

* le quart de la circonférence du disque

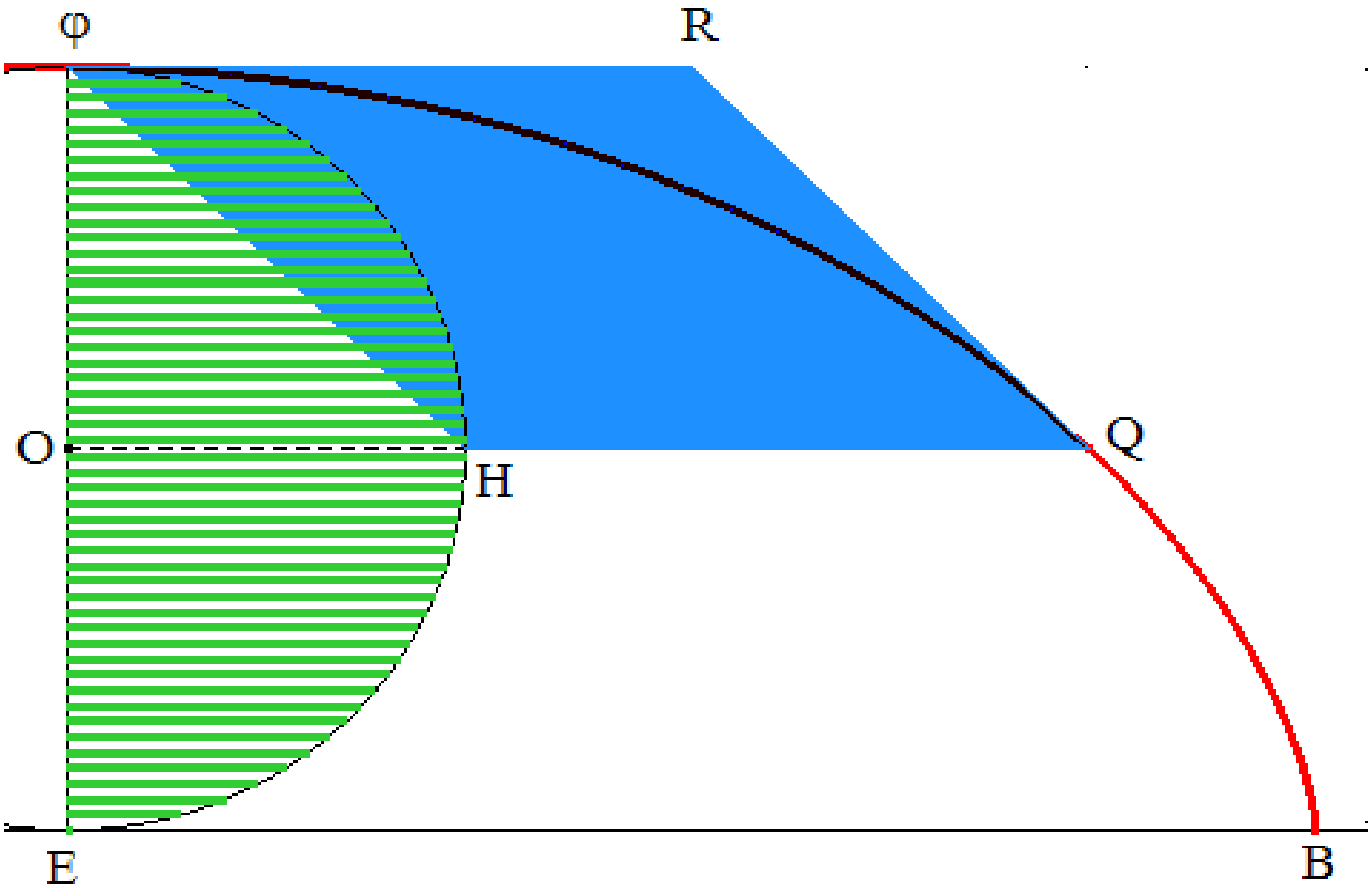
* le rayon du disque

est celle du demi disque

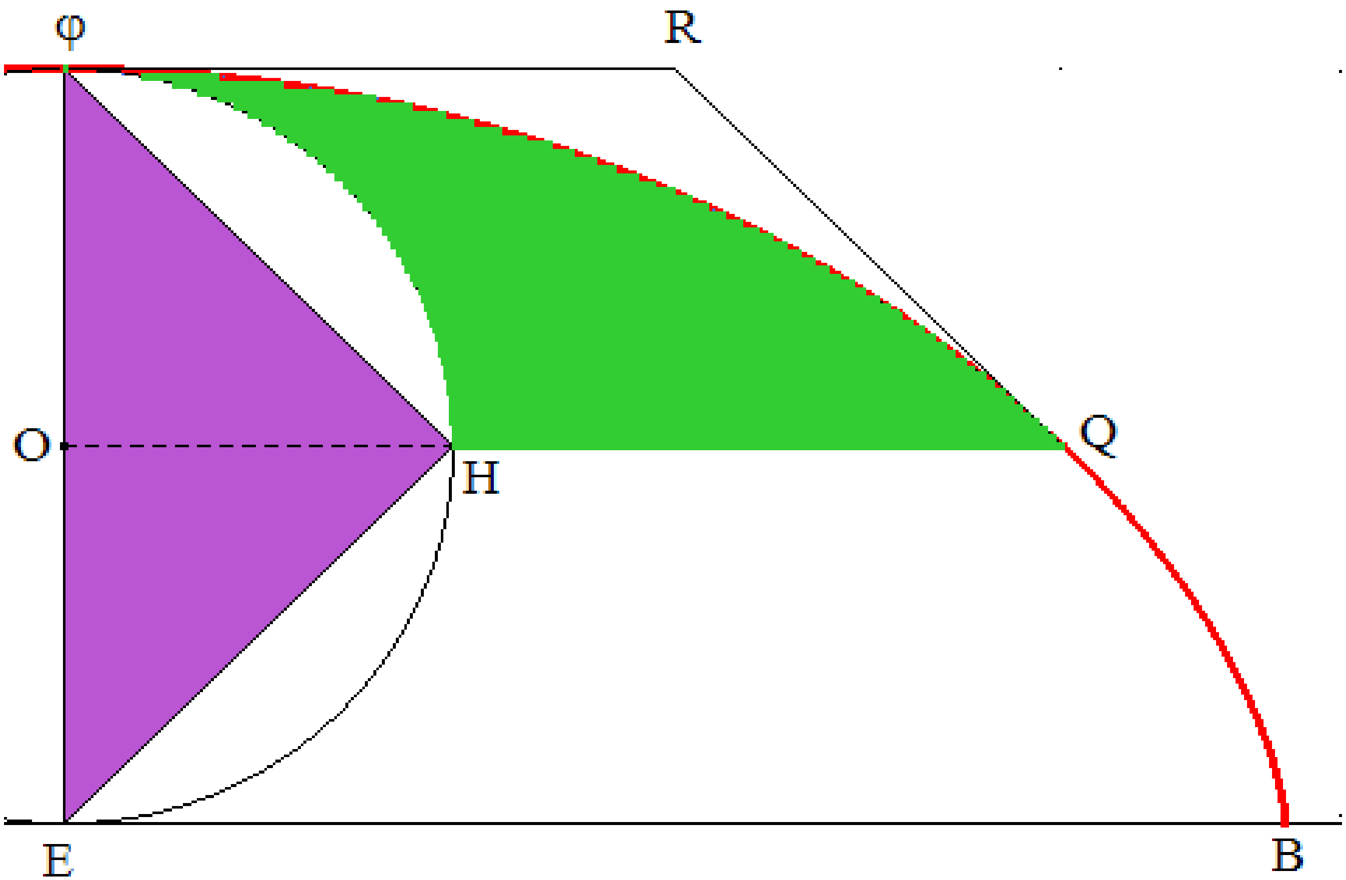


Aire du parallélogramme φHQR (5)

Donc l’aire du parallélogramme φHQR est égale à celle du demi disque φHE.



Donc l’aire de la “corne” φHQ, égale à celle du parallélogramme φHQR diminuée du double de l’aire du segment φH, est égale à l’aire du demi disque diminuée de celles des segments de disque φH et HE,
donc à celle du triangle φHE, elle-même égale à celle du carré sur le rayon OH. Cqfd



Conclusion

Le jeu est égal si et seulement si $a = \dfrac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}C}$

Or $\int y\,dx = b^2$ et $C = \dfrac{\pi}{2}b$

Donc le jeu est égal si et seulement si $a = \dfrac{b^2}{\frac{\pi}{4}b} = \dfrac{4}{\pi}b$

ou, ce qui est équivalent, $b = \dfrac{\pi}{4}a \approx 0,78.a$

ce que Buffon exprime par :

la longueur de la baguette doit faire à peu-près les trois quarts de la diſtance des joints du parquet.

Loi de probabilité du jeu de la baguette

La probabilité pour que la baguette rencontre un joint est

$$p = \frac{f \,.\int y\,dx}{f\,.aC} = \frac{b^2}{a\frac{\pi}{2}b} = \frac{2b}{\pi a} = \frac{2}{\pi r} \quad \text{où } r = \frac{a}{b}$$